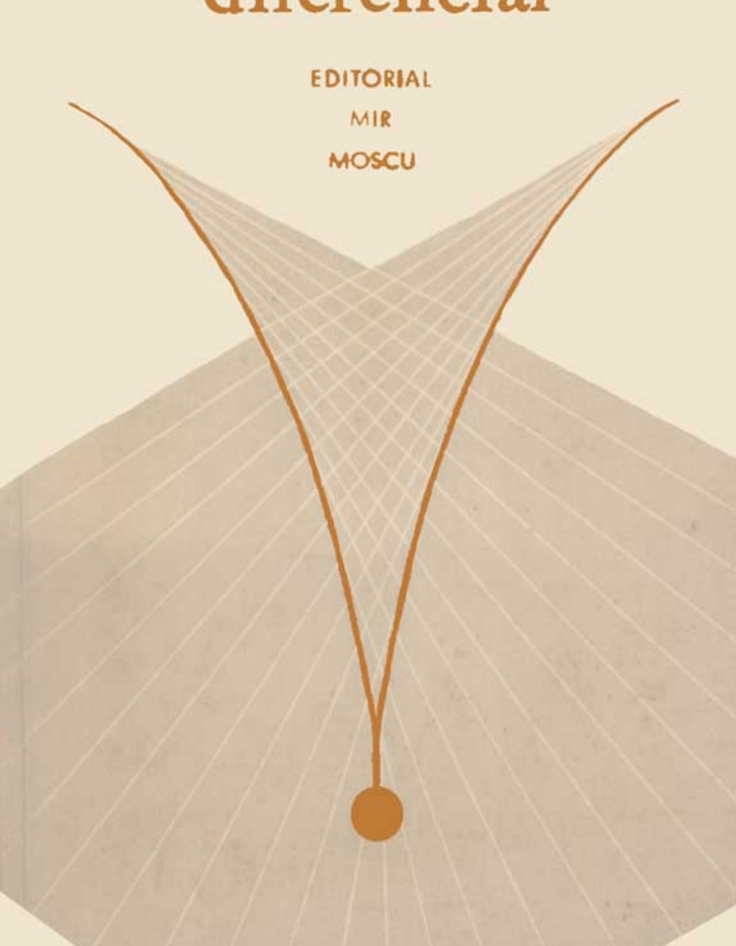
A. V. POGORÉLOV

Geometría diferencial

EDITORIAL
MIR
MOSCU




ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИР

А. В. ПОГОРЕЛОВ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА

A. V. POGORÉLOV

Geometría diferencial

TRADUCIDO DEL RUSO POR CARLOS VEGA,
CANDIDATO A DOCTOR EN CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS

EDITORIAL MIR MOSCÚ

Impreso en la URSS. 1977

на испанском языке

INDICE

PREFACIO A LA SEGUNDA EDICION

La edición presente difiere de la primera (1955). Se han introducido modificaciones en casi todas las secciones del libro. Estas modificaciones son de carácter diverso. En unos casos se han mejorado las demostraciones, en otros, se ha cambiado el orden de exposición y, en los demás, se ha completado ésta con ejemplos y dibujos aclaratorios.

En el libro se exponen con suficiente detalle los temas fundamentales del curso correspondiente al programa de las Facultades de Física y Matemáticas. Los temas que rebasan los márgenes del programa son desarrollados, como regla, en forma descriptiva.

El autor

PREFACIO A LA TERCERA EDICION

La edición presente difiere de la anterior (1956) en que contiene ciertos perfeccionamientos de una serie de demostraciones. De modo substancial ha sido modificada únicamente la exposición del tema sobre la envolvente de una familia monoparamétrica de curvas y de superficies.

El autor

INTRODUCCION

La Geometría diferencial es la rama de las Matemáticas que estudia, aplicando métodos del análisis infinitesimal, imágenes geométricas, curvas y superficies, en primer lugar, y también familias de curvas y superficies. Un rasgo característico de la Geometría diferencial es que se ocupa ante todo de las propiedades «locales» de las curvas y superficies, o sea, de las propiedades de pedazos de curvas y superficies tan pequeños como se quiera.

La Geometría diferencial surgió y se desarrolló estrechamente ligada al análisis que, a su vez, nació en gran medida de problemas geométricos. Muchos conceptos geométricos precedieron los conceptos respectivos del análisis. Por ejemplo, el concepto de tangente precedió al de derivada y los conceptos de área y volumen, al de integral.

El surgimiento de la Geometría diferencial se remonta a la primera mitad del siglo XVIII ligándose a los nombres de L. Euler y G. Monge. La primera exposición sinóptica de la teoría de superficies pertenece a Monge («Aplicación del Análisis a la Geometría», 1795).

En 1827 Gauss publicó su obra «Estudio general sobre superficies curvas» que sentó las bases de la teoría de superficies en su forma actual. Desde entonces la Geometría diferencial deja de ser una simple aplicación del análisis y pasa a ocupar un lugar independiente en las Matemáticas.

El descubrimiento de la Geometría no euclidiana que se debe a N. I. Lobachevski influyó enormemente en el desarrollo de toda la Geometría incluida la diferencial. Así, con su conferencia «Sobre las hipótesis en las que se funda la Geometría», dictada en 1854, G. F. B. Riemann sentó las bases de la llamada Geometría de Riemann que, aplicada al caso de variedades multidimensionales, ocupa la misma posición respecto a la geometría del espacio euclídeo de n dimensiones que la geometría interior de una superficie arbitraria respecto a la geometría euclídea del plano.

El punto de vista teórico-conjuntista de F. Klein, expuesto en su programa de Erlangen (1872), fue desarrollado en la Geometría diferencial por E. Cartan que elaboró la teoría de espacios de conexión proyectiva y afín.

En Rusia la escuela de Geometría diferencial fue creada por F. Minding y K. M. Petersón que dedicaron sus investigaciones fundamentales a la teoría de doblamiento de superficies. Estas investigaciones fueron continuadas en los trabajos de muchos geómetras rusos y soviéticos.

El presente libro se basa en las conferencias de Geometría diferencial que el autor dictó en la Facultad de Física y Matemática de la Universidad de Járkov. El autor se propuso exponer rigurosamente los fundamentos de la Geometría diferencial y sus métodos típicos de investigación sin alterar considerablemente las tradiciones existentes. Muchas cuestiones concretas de Geometría diferencial aparecen en forma de ejercicios y problemas y la solución de éstos es una condición indispensable de la preparación de los estudiantes geómetras.

PRIMERA PARTE

Teoría de curvas

CAPITULO I

CONCEPTO DE CURVA

La curva es uno de los objetos fundamentales de la Geometría diferencial. En este capítulo el concepto de curva es aclarado en la medida en que lo requiere la exposición sucesiva.

§ 1. Curva elemental. Curva simple. Curva general

Antepondremos a la definición del concepto de curva alguna información sobre las aplicaciones de un conjunto arbitrario de puntos en el espacio.

Sea M un conjunto cualquiera de puntos del espacio. Se dice que se tiene una *aplicación* f del conjunto M en el espacio si a cada punto X del conjunto M se le hace corresponder un punto $f(X)$ del espacio. El punto $f(X)$ del espacio se denomina *imagen* del punto X. El conjunto de puntos $f(M)$ formado por las imágenes de todos los puntos del conjunto M, se denomina *imagen* del conjunto M.

Una aplicación f del conjunto M se llama *inyectiva* si son diferentes las imágenes de distintos puntos. Sea f una aplicación inyectiva. De un modo natural queda definida entonces la aplicación f^{-1} del conjunto $f(M)$ que asocia al punto $f(X)$ el punto X. Esta aplicación se denomina *inversa* de f.

Una aplicación f de un conjunto M se llama *continua* si cualesquiera que sean el punto X de M y el número

$\varepsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ tal que para todo punto Y de M la distancia entre los puntos $f(Y)$ y $f(X)$ será menor que ε siempre que la distancia entre Y y X sea menor que δ.

Sea f una aplicación inyectiva y continua de M. Si la aplicación f^{-1} del conjunto $f(M)$ también es continua, se dice que f es una *aplicación topológica*. Siendo f una aplicación topológica, suele decirse que el conjunto M y su imagen $f(M)$ son *homeomorfos* o *topológicamente equivalentes*.

Definamos la curva elemental.

Un conjunto γ de puntos del espacio se llamará *curva elemental* si es la imagen obtenida en el espacio por una aplicación topológica de un segmento abierto de la recta.

Sea γ una curva elemental y sea $a < t < b$ el segmento del que se obtiene por la aplicación f la curva. Sean $f_1(t)$, $f_2(t)$ y $f_3(t)$ las coordenadas del punto de la curva correspondiente al punto t del segmento. El sistema de igualdades

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t)$$

se denomina *ecuaciones* de la curva γ en forma paramétrica.

Un conjunto G de puntos del espacio se llama *abierto* si para todo punto X de este conjunto se puede indicar un número $\varepsilon > 0$ tal que todos los puntos del espacio distanciados de X en menos de ε también pertenecen a G. Es obvio que el conjunto formado por cualquier colección de conjuntos abiertos será abierto.

Se llama *entorno* de un punto X del espacio cualquier conjunto abierto que contiene este punto.

Un conjunto M de puntos del espacio se llama conexo si no existen dos conjuntos abiertos G' y G'' que dividen el conjunto M en dos partes M' y M'' de modo que una pertenezca sólo a G' y la otra, sólo a G''.

Definamos ahora la curva simple.

Un conjunto γ de puntos del espacio se llamará *curva simple* si este conjunto es conexo y si para todo punto X del mismo existe un entorno tal que la parte de γ comprendida en él constituye una curva elemental.

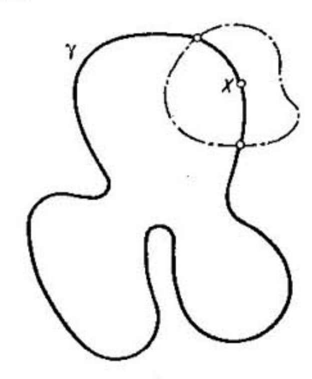


Fig. 1

La estructura «global» de una curva simple se aclara en el teorema siguiente.

La imagen obtenida en el espacio por una aplicación topológica de un segmento abierto o de una circunferencia es una curva simple.

Recíprocamente, cualquier curva simple es la imagen obtenida en el espacio por una aplicación topológica de un segmento abierto o de una circunferencia. Brevemente esto se enuncia así: *una curva simple es homeomorfa con un segmento abierto o una circunferencia.*

No daremos la demostración de este teorema. Notemos sólo que la curva simple se caracteriza plenamente por la propiedad, indicada en este teorema, de ser homeomorfa con un segmento abierto o una circunferencia; por consiguiente, puede ser definida mediante esta propiedad.

Una curva simple homeomorfa con una circunferencia se denomina *cerrada*.

Se llama entorno de un punto X de una curva simple γ la parte común de la curva γ y de un entorno espacial del punto X. Según la definición, todo punto de una curva simple posee un entorno que constituye una curva elemental. En lo sucesivo, al referirnos a un entorno de un punto de una curva, sobrentenderemos siempre un entorno elemental de este tipo (fig. 1).

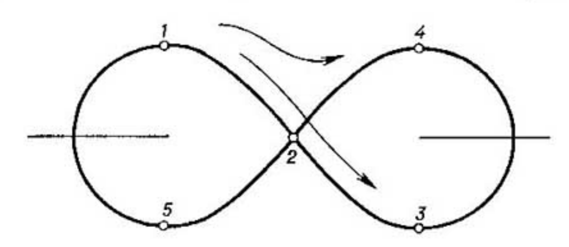


Fig. 2

Supongamos que la curva simple γ es la imagen obtenida por la aplicación topológica f del segmento abierto o la circunferencia g. Sea X un punto arbitrario de g y sea ω un entorno cualquiera de éste. Entonces la imagen de ω obtenida por la aplicación f es un entorno del punto $f(X)$ en la curva γ. Recíprocamente, cualquier entorno del punto $f(X)$ puede obtenerse de este modo.

Una aplicación f de un conjunto M en el espacio se denomina *localmente topológica* si para todo punto de este conjunto existe un entorno en el que la aplicación f es topológica.

Un conjunto γ de puntos del espacio se denominará *curva general* si este conjunto es la imagen obtenida por una aplicación localmente topológica de una curva simple en el espacio.

Diremos que la aplicación f_1 de una curva simple γ_1 y la aplicación f_2 de una curva simple γ_2 determinan una misma curva general γ, si entre los puntos de las curvas γ_1 y γ_2 puede establecerse una correspondencia topológica tal que coincidan en la curva γ las imágenes de los puntos correspondientes de estas curvas.

Con el fin de explicar la segunda parte de esta definición veamos un ejemplo. En la fig. 2 aparece una curva general. Puede interpretarse como la imagen de una circunferencia obtenida por una aplicación localmente topológica siguiendo dos procedimientos distintos que, desde el punto de vista de la definición dada, conducen a diferentes curvas y que se pueden evidenciar de la forma siguiente.

Supongamos que el punto se desplaza según la circunferencia. Entonces su imagen se desliza según la curva, con la particularidad de que el punto imagen, al recorrer la curva, puede tomar sucesivamente las posiciones 1, 2, 3, 4, 2, 5, pero también puede recorrer la curva en el orden 1, 2, 4, 3, 2, 5. Las aplicaciones correspondientes a estos recorridos determinan diferentes curvas generales aun cuando éstas coincidan en tanto que conjuntos puntuales.

Supongamos que la curva general γ es la imagen obtenida por la aplicación localmente topológica f de la curva simple $\bar{\gamma}$ en el espacio. Denominaremos entorno del punto $f(X)$ en la curva γ la imagen de cualquier entorno del punto X en la curva $\bar{\gamma}$ obtenida por la aplicación f. Puesto que la aplicación f es topológica en un entorno suficientemente pequeño del punto X, resulta que $f(X)$ posee en γ un entorno que constituye una curva elemental.

De este modo, *el estudio local de cualquier curva puede ser reducido a la consideración de una curva elemental.*

§ 2. Curva regular. Modos de representación analítica de una curva

Una curva γ se llamará *regular* (k veces diferenciable) si para todo punto de esta curva existe un entorno que admite una parametrización regular, o sea, puede ser representado por unas ecuaciones en forma paramétrica

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t),$$

donde f_1, f_2 y f_3 son funciones regulares (k veces continuamente diferenciables). Siendo $k = 1$, la curva se denomina *suave*.

Una curva se llama *analítica* si admite una parametrización analítica (f_1, f_2 y f_3 son funciones analíticas) en un entorno suficientemente pequeño de cada uno de sus puntos.

En lo sucesivo consideraremos exclusivamente curvas regulares.

Según hemos visto en el parágrafo anterior, toda curva puede ser representada, en un entorno de cada punto,

por ecuaciones en forma paramétrica

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

donde $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ son unas funciones definidas en un intervalo $a < t < b$.

De modo natural se plantea la cuestión: ¿cuándo el sistema de igualdades

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (a < t < b)$$

determina una curva regular, o sea, cuándo estas igualdades pueden considerarse como ecuaciones de una curva? En muchos casos la respuesta se obtiene del teorema siguiente.

Teorema. Si $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ son unas funciones regulares que cumplen la condición

$$x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) > 0 \quad (a < t < b),$$

entonces el sistema de igualdades

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (a < t < b)$$

representa las ecuaciones de una curva γ. Esta curva es la imagen del segmento $a < t < b$ que se obtiene por la aplicación localmente topológica que asocia al punto t del segmento el punto del espacio con las coordenadas $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$.

Aquí sólo debe demostrarse la afirmación de que la aplicación indicada es localmente inyectiva. Demostremos esta proposición.

Si es falsa, existe un t_0 en cuyo entorno, por pequeño que sea, se pueden señalar t_1 y t_2 ($t_1 \neq t_2$) tales que

$$x(t_1) - x(t_2) = 0, \; y(t_1) - y(t_2) = 0,$$
$$z(t_1) - z(t_2) = 0.$$

Según el teorema del valor medio, de aquí obtenemos

$$x'(\vartheta_1) = 0, \quad y'(\vartheta_2) = 0, \quad z'(\vartheta_3) = 0,$$

donde ϑ_1, ϑ_2 y ϑ_3 están comprendidos entre t_1 y t_2. Puesto que t_1 y t_2 son tan próximos a t_0 como se quiera, de la continuidad de las funciones $x'(t)$, $y'(t)$ y $z'(t)$ resulta

$$x'(t_0) = 0, \quad y'(t_0) = 0, \quad z'(t_0) = 0$$

y, por consiguiente,

$$x'^2(t_0)+y'^2(t_0)+z'^2(t_0)=0.$$

Llegamos a una contradicción. Hemos demostrado la proposición.

Con una selección adecuada de los ejes de coordenadas x, y y z, algunas curvas admiten la parametrización

$$x=t,\quad y=\varphi(t),\quad z=\psi(t)\qquad (a<t<b)$$

o

$$y=\varphi(x),\quad z=\psi(x)\qquad (a<x<b)$$

que viene a ser lo mismo. En muchos casos esta parametrización resulta especialmente cómoda. En relación con esto surge la cuestión: ¿cuándo admite una curva, al menos «localmente», semejante parametrización? La respuesta aparece en el teorema siguiente.

Teorema. Sea γ *una curva regular y sea*

$$x=f_1(t),\quad y=f_2(t),\quad z=f_3(t)\qquad (a<t<b)$$

una parametrización regular de esta curva en un entorno del punto (x_0, y_0, z_0) *correspondiente a* $t=t_0$. *Supongamos que* $f_1'(t)\neq 0$ *en este punto. Entonces, en un entorno suficientemente pequeño del punto* t_0, *la curva* γ *puede definirse por las ecuaciones*

$$y=\varphi(x),\quad z=\psi(x),$$

donde φ *y* ψ *son funciones regulares de* x.

Efectivamente, según el teorema de las funciones implícitas, existe una función regular $\chi(x)$ que es igual a t_0 para $x=x_0$ y que satisface la ecuación

$$x=f_1(\chi(x))$$

para todo x próximo a x_0. Derivando esta identidad y tomando $x=x_0$, encontramos $1=f_1'(t_0)\,\chi'(x_0)$, de donde $\chi'(x)\neq 0$. De modo que la función $\chi(x)$ es monótona en un entorno de x_0 y, por consiguiente, siendo δ suficientemente pequeño, la aplicación del segmento $x_0-\delta<x<x_0+\delta$ en el eje t, determinada por la igualdad $t=\chi(x)$, será topológica.

De aquí resulta que el entorno $\chi(x_0-\delta)<t<$ $<\chi(x_0+\delta)$ de la curva γ puede definirse mediante las

ecuaciones

$$y = f_2(\chi(x)), \quad z = f_3(\chi(x))$$
$$(x_0 - \delta < x < x_0 + \delta).$$

Hemos demostrado el teorema.

Consideremos ahora la representación implícita de la curva limitándonos primero, para simplificar, a curvas planas.

Una curva se denomina *plana* si todos sus puntos pertenecen a un plano. Aceptaremos que éste es el plano xy.

Diremos que una curva plana viene definida por la ecuación

$$\varphi(x, y) = 0,$$

entendiendo con ello exclusivamente que las coordenadas de los puntos de la curva satisfacen esta ecuación. Pero pueden existir puntos del plano que satisfagan esta ecuación y no pertenezcan a la curva y también puede suceder que el conjunto de todos los puntos del plano que satisfagan la ecuación $\varphi(x, y) = 0$ no constituya siquiera una curva en el sentido de la definición dada en el parágrafo anterior.

El teorema siguiente desempeña un papel importante con relación a las curvas definidas por ecuaciones en forma implícita.

Teorema. Sea $\varphi(x, y)$ una función regular de las variables x e y. Sea M el conjunto de los puntos del plano xy que satisfacen la ecuación

$$\varphi(x, y) = 0$$

y sea (x_0, y_0) un punto de este conjunto en el que $\varphi_x^2 + \varphi_y^2 \neq 0$. Entonces el punto (x_0, y_0) posee un entorno tal que todos los puntos del conjunto M pertenecientes a él forman una curva elemental regular.

Demostración. Supongamos, para concretar, que en el punto (x_0, y_0) es $\varphi_y \neq 0$. Según el teorema de las funciones implícitas, existen unos números δ y ε, mayores que cero, y una función regular $\psi(x)$, definida en el intervalo $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, tales que todos los puntos $(x, \psi(x))$, $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, satisfacen la ecuación $\varphi(x, y) = 0$ y, además, con estos puntos se agotan todos

los puntos del rectángulo $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, $y_0 - \varepsilon < y < y_0 + \varepsilon$ que satisfacen la ecuación $\varphi(x, y) = 0$. La curva elemental de la que trata el teorema viene definida por la ecuación

$$y = \psi(x) \quad (x_0 - \delta < x < x_0 + \delta).$$

Hemos demostrado el teorema.

El teorema correspondiente a las curvas espaciales consiste en lo siguiente.

Teorema. Sean $\varphi(x, y, z)$ *y* $\psi(x, y, z)$ *funciones regulares de las variables* x, y *y* z. *Sea* M *el conjunto de los puntos del espacio que satisfacen las ecuaciones*

$$\varphi(x, y, z) = 0 \quad y \quad \psi(x, y, z) = 0$$

y sea (x_0, y_0, z_0) *un punto de este conjunto en el cual es igual a dos el rango de la matriz*

$$\begin{pmatrix} \varphi_x & \varphi_y & \varphi_z \\ \psi_x & \psi_y & \psi_z \end{pmatrix}.$$

Entonces el punto (x_0, y_0, z_0) *posee un entorno tal que todos los puntos del conjunto* M *pertenecientes a este entorno constituyen una curva elemental regular.*

La demostración de este teorema también se basa en la aplicación del teorema de las funciones implícitas y no difiere, en esencia, de la demostración del teorema correspondiente a las curvas planas.

§ 3. Puntos singulares de curvas regulares planas

Sea γ una curva regular plana y sea P un punto de la misma. El punto P de la curva γ se denomina *punto regular* respecto al grado dado de regularidad k si en un entorno de este punto la curva admite una parametrización k veces diferenciable

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

que en el punto P satisface la condición $x'^2 + y'^2 \neq 0$. Si no existe tal parametrización, se dice que P es un *punto singular.*

Ejemplo. El punto $t = 0$ de la curva

$$x = t^3, \quad y = t^7 \quad (-1 < t < +1)$$

es regular respecto a las parametrizaciones dos veces diferenciables ya que la curva admite una representación equivalente

$$x = \tau, \; y = \mp |\tau|^{\frac{7}{3}} (-1 < \tau < 1).$$

Sin embargo, más adelante veremos que el punto $t = 0$ es singular respecto a las parametrizaciones analíticas.

En este parágrafo analizaremos detalladamente el problema sobre los puntos singulares de curvas analíticas planas respecto a parametrizaciones analíticas.

Lema. Sean γ una curva analítica y O un punto de la misma. Entonces, escogiendo convenientemente los ejes de coordenadas, la curva puede parametrizarse de modo que sus ecuaciones en un entorno del punto O sean de la forma

$$x = a_1 t^{n_1},$$
$$y = b_1 t^{m_1} + b_2 t^{m_2} + \ldots, \quad n_1 \leqslant m_1.$$

Demostración. Tomemos el punto O como origen de coordenadas. Sea

$$x = \alpha_1 s^{n_1} + \alpha_2 s^{n_2} + \ldots,$$
$$y = \beta_1 s^{m_1} + \beta_2 s^{m_2} + \ldots$$

una parametrización analítica de la curva. Sin perder generalidad podemos aceptar que al punto O le corresponde el valor del parámetro $s = 0$. Podemos aceptar también que $n_1 \leqslant m_1$. (Si $n_1 > m_1$, podemos cambiar de lugar x e y.)

Introduzcamos un parámetro nuevo t ligado a s mediante la igualdad

$$t = s \left(\frac{\alpha_1 s^{n_1} + \alpha_2 s^{n_2} + \ldots}{\alpha_1 s^{n_1}} \right)^{\frac{1}{n_1}}.$$

Escogido el parámetro de este modo, las ecuaciones de la curva γ en un entorno del punto O toman la forma

$$x = a_1 t^{n_1},$$
$$y = b_1 t^{m_1} + b_2 t^{m_2} + \ldots,$$

que es lo que se quería demostrar.

Teorema. Supongamos que en un entorno del punto O una curva analítica viene dada por las ecuaciones

$$x = a_1 t^{n_1},$$
$$y = b_1 t^{m_1} + b_2 t^{m_2} + \ldots, \quad n_1 \leqslant m_1.$$

Entonces, para que el punto O sea un punto singular de la curva es necesario y suficiente que al menos uno de los m_k no sea divisible por n_1.

Demostración. Necesidad. Observemos, en primer lugar, que n_1 y todos los m_k no pueden ser pares ya que entonces, por pequeño que sea t, se tendría $x(t) = x(-t)$ e $y(t) = y(-t)$, o sea, quedaría infringida la inyectividad de la aplicación en un entorno tan pequeño como se quiera del punto $t = 0$.

Supongamos que todos los m_k son múltiplos de n_1 (n_1 es obviamente impar). Introduzcamos en lugar de t el parámetro $s = t^{n_1}$. Entonces las ecuaciones de la curva en un entorno del punto O tomarán la forma

$$x = a_1 s,$$
$$y = b_1 s^{k_1} + b_2 s^{k_2} + \ldots$$

Es evidente que el punto O correspondiente al valor $s = 0$ del parámetro resulta un punto regular de la curva.

Suficiencia. Supongamos que al menos uno de los m_k no es divisible por n_1. Demostremos que O es un punto singular. Si el punto O es regular, la curva admite en un entorno del mismo una parametrización $x = f_1(\sigma)$, $y = f_2(\sigma)$, siendo f_1 y f_2 unas funciones analíticas que, para el valor $\sigma = \sigma_0$ correspondiente al punto O cumplen la condición $f_1'^2 + f_2'^2 \neq 0$.

Puesto que $f_2(\sigma)(f_1(\sigma))^{-1} = y(t)(x(t))^{-1}$ e $y(t)(x(t))^{-1}$ tiende a un límite finito igual a $f_2'(\sigma_0) \times (f_1'(\sigma_0))^{-1}$ cuando $t \to 0$, resulta que $f_1' \neq 0$ en el punto O y, por consiguiente, nuestra curva puede ser definida, según el teorema del parágrafo anterior, mediante la ecuación

$$y = \varphi(x) = c_1 x + c_2 x^2 + \ldots,$$

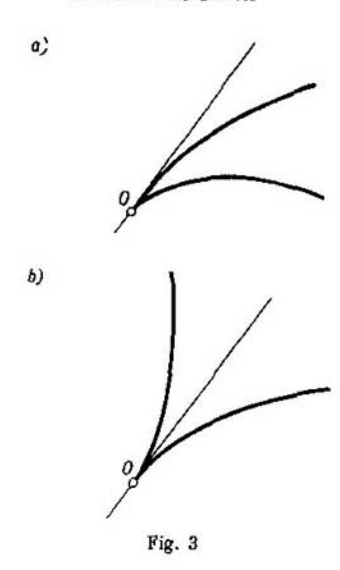


Fig. 3

donde $\varphi(x)$ es una función analítica de x. Introduciendo $x = x(t)$ e $y = y(t)$ en esta ecuación, obtenemos la identidad

$$b_1 t^{m_1} + b_2 t^{m_2} + \ldots = c_1 a_1 t^{n_1} + c_2 a_1^2 t^{2n_1} + \ldots$$

De aquí resulta que todos los m_k son múltiplos de n_1. Llegamos a una contradicción. Hemos demostrado completamente el teorema.

Observación. Si el punto O es singular siendo n_1 y m_1 pares, se denomina *punto de retroceso de segunda especie.* En un entorno de este punto la curva tiene la forma indicada en la fig. 3, *a*.

Si el punto O es singular, m_1 no es divisible por n_1 y, además, n_1 es par y m_1 es impar, se dice que O es un *punto de retroceso de primera especie.* La forma de la curva en un entorno de semejante punto singular se indica en la fig. 3, *b*.

Para probar que un punto de una curva es singular, existe un criterio *suficiente* sencillo que ofrece el teorema siguiente.

Teorema. Supongamos que en un entorno del punto O la curva analítica γ *viene definida por las ecuaciones*

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

donde $x(t)$ *e* $y(t)$ *son funciones analíticas del parámetro* t. *Supongamos que las primeras derivadas distintas de cero de las funciones* $x(t)$ *e* $y(t)$ *son de orden* n_1 *y* m_1, *respectivamente, siendo* $n_1 < m_1$.

Entonces el punto O será singular si m_1 *no es divisible por* n_1, *con la particularidad de que O será un punto de retroceso de segunda especie si* n_1 *y* m_1 *son ambos pares, y será un punto de retroceso de primera especie si* n_1 *es par y* m_1 *es impar.*

Este teorema se deduce directamente del anterior.

Para terminar, consideremos el problema de los puntos singulares de curvas analíticas planas definidas implícitamente.

Sea γ una curva analítica plana definida por la ecuación

$$\varphi(x, y) = 0,$$

donde $\varphi(x, y)$ es una función analítica de las variables x e y.

Si $\varphi_x^2 + \varphi_y^2 \neq 0$ en el punto $O(x_0, y_0)$ de la curva γ, este punto de la curva es regular como quedó demostrado en el § 2. De este modo sólo pueden ser singulares aquellos puntos de la curva en los cuales $\varphi_x = \varphi_y = 0$.

Sin perder generalidad, podemos aceptar que el punto O es el origen de coordenadas. En un entorno del punto O la curva γ admite una parametrización de tipo

$$x = a_1 t^{n_1},$$
$$y = b_1 t^{m_1} + b_2 t^{m_2} + \ldots;$$

podemos aceptar que $n_1 \leqslant m_1$ ya que de lo contrario podríamos cambiar los ejes x e y. Para determinar si O es un punto singular de la curva y para revelar el carácter de la singularidad en este punto, basta conocer los exponents $n_1, m_1, m_2 \ldots$

Para hallar estos exponentes, recurriremos a la identidad

$$\varphi(x(t),\ y(t)) \equiv 0.$$

Supongamos que el desarrollo de la función $\varphi(x, y)$ en serie de potencias de x e y comienza con los términos de segundo grado

$$\varphi(x, y) = a_{20}x^2 + 2a_{11}xy + a_{02}y^2 + \ldots$$

Distinguiremos tres casos:

$$1.\ a_{20}a_{02} - a_{11}^2 > 0.$$
$$2.\ a_{20}a_{02} - a_{11}^2 < 0.$$
$$3.\ a_{20}a_{02} - a_{11}^2 = 0.$$

Realizando un giro de los ejes de coordenadas, se puede lograr que en el desarrollo de la función $\varphi(x, y)$ en serie de potencias desaparezca el término que contiene xy.

Introduciendo $x(t)$ e $y(t)$ en el desarrollo de la función $\varphi(x, y)$, obtenemos una identidad respecto a t. Si $n_1 < m_1$, el menor grado de t, igual a $2n_1$, lo tendrá sólo un término: $a_{20}a_1^2t^{2n_1}$. De aquí resulta $a_{20} = 0$, lo cual es imposible en el primer y segundo casos. Resta aceptar que $n_1 = m_1$. Entonces, en los dos primeros casos la potencia inferior corresponde a los términos $a_{20}a_1^2t^{2n_1}$ y $a_{02}b_1^2t^{2m_1}$. En el primer caso esto tampoco puede suceder ya que a_{20} y a_{02} son del mismo signo y de la identidad se deduce que $a_{20}a_1^2 + a_{02}b_1^2 = 0$.

De este modo no existe en el primer caso una curva analítica que satisfaga la ecuación $\varphi(x, y) = 0$ y que contenga el punto O. En este caso, en un entorno suficientemente pequeño del punto O, no existe ningún punto, distinto de O, que verifique la ecuación $\varphi(x, y) = 0$. Si la curva se define como el lugar geométrico de los puntos que satisfacen la ecuación $\varphi(x, y) = 0$, este punto se denomina *punto singular aislado*.

Ejemplo. El lugar geométrico de los puntos que satisfacen la ecuación

$$(x^2 + y^2)(x - 1) = 0$$

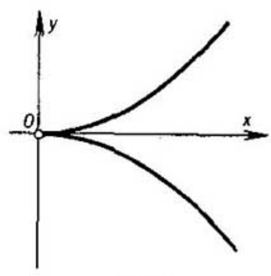


Fig. 4

consta de la recta $x = 1$ y del punto (0, 0) que es un punto aislado de este lugar geométrico.

En el tercer caso podemos aceptar que $a_{20} = 0$ ya que $a_{20}a_{02} = 0$. El desarrollo de la función $\varphi(x, y)$ tiene la forma

$$\varphi(x, y) = a_{02}y^2 + a_{30}x^3 + \ldots$$

Supongamos que $a_{30} \neq 0$. En el caso general esto corresponde a que las formas

$$\varphi_2 = a_{20}x^2 + 2a_{11}xy + a_{02}y^2 \text{ y } \varphi_3 = a_{30}x^3 + \ldots + a_{03}y^3$$

no poseen divisores comunes.

Introduciendo $x(t)$ e $y(t)$ en el desarrollo de la función $\varphi(x, y)$, observamos que los términos de potencia inferior de t son $a_{02}b_1^2t^{2m_1}$ y $a_{30}a_1^3t^{3n_1}$. De aquí resulta que $2m_1 = 3n_1$, o sea, m_1 no es divisible por n_1. Por consiguiente, el punto O es un punto singular de la curva.

Si se acepta que m_1 y n_1 son ambos pares, resultan pares todos los m_k pues se expresan homogénea y linealmente en términos de m_1 y n_1. Pero anteriormente se ha señalado que n_1 y todos los m_k no pueden ser pares. Por esto, sólo n_1 es par. Ello significa que el punto singular O es un punto de retroceso de primera especie.

Ejemplo. Para la parábola semicúbica $y^2 - x^3 = 0$ el origen de coordenadas es un punto de retroceso de primera especie (fig. 4).

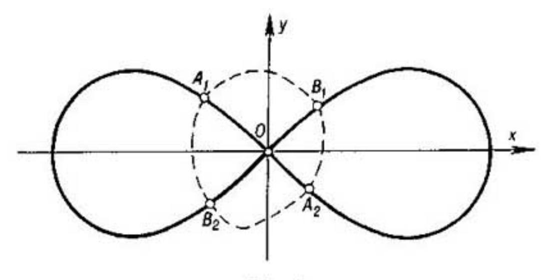


Fig. 5

Consideremos, finalmente, el segundo caso. En este caso la función $\varphi(x, y)$ puede representarse en la forma

$$\varphi(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2,$$

donde A, B y C son funciones analíticas de x e y que en el punto O valen a_{20}, 0 y a_{02}, respectivamente, y que, por ende, satisfacen en una proximidad de este punto la desigualdad $AC - B^2 < 0$. Por eso, en un entorno pequeño del punto O se tiene

$$\varphi(x, y) = C(y - x\xi_1(x, y))(y - x\xi_2(x, y)),$$

donde ξ_1 y ξ_2 son las raíces de la ecuación de segundo grado

$$A + 2B\xi + C\xi^2 = 0.$$

Es decir, en el segundo caso el lugar geométrico de los puntos que satisfacen la ecuación $\varphi(x, y) = 0$ en un entorno del punto O, consta de dos curvas analíticas $y - x\xi_1(x, y) = 0$ e $y - x\xi_2(x, y) = 0$ y el punto O es un punto regular de ambas ya que

$$\frac{\partial}{\partial x}(y - x\xi_i(x, y))\Big|_0 = -\xi_i(0, 0) \neq 0.$$

Sin embargo, si la curva se define como el lugar geométrico de los puntos que satisfacen la ecuación

$$\varphi(x, y) = 0,$$

también en este caso el punto O se considera singular y se denomina punto *múltiple*.

Ejemplo. El lugar geométrico de los puntos que satisfacen la ecuación

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2 (x^2 - y^2) = 0$$

(lemniscata de Bernoulli, fig. 5) consta en un entorno del punto múltiple $(0, 0)$ de dos curvas analíticas $\widehat{A_1A_2}$ y $\widehat{B_1B_2}$.

§ 4. Asíntotas de curvas planas

Sea γ una curva no cerrada y sean

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (a < t < b)$$

sus ecuaciones. Se dice que la curva se extiende infinitamente por un lado si $x^2(t) + y^2(t) \to \infty$ cuando $t \to a$ (o cuando $t \to b$). En cambio, si $x^2(t) + y^2(t) \to \infty$ tanto para $t \to a$ como para $t \to b$, se dice que la curva se extiende infinitamente por ambos lados. Es obvio que la propiedad de una curva de extenderse infinitamente no depende de su parametrización.

Supongamos que la curva γ se extiende infinitamente; por ejemplo, sea $x^2 + y^2 \to \infty$ para $t \to a$. Una recta g se denomina *asíntota* de la curva γ si la distancia $d(t)$ entre el punto de la curva γ y la recta g tiende a cero cuando $t \to a$ (fig. 6).

Teorema. Para que una curva γ que viene dada por las ecuaciones

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (a < t < b)$$

y que se extiende infinitamente cuando $t \to a$, tenga una asíntota es necesario y suficiente que:

1. *Al menos uno de los cocientes $y(t)(x(t))^{-1}$ o $x(t) \times (y(t))^{-1}$ tienda a un límite finito cuando $t \to a$. Supongamos, para concretar, que $y(t)(x(t))^{-1} \to k$.*

2. *La expresión $y(t) - kx(t)$ tienda también a un límite para $t \to a$ una vez cumplida la primera condición.*

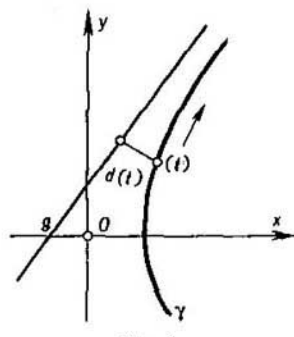


Fig. 6

Si este límite se designa por l, la ecuación de la asíntota será

$$y - kx - l = 0.$$

Demostración. Necesidad. Sea g:

$$y - kx - l = 0$$

la asíntota de la curva γ. La expresión

$$y(t) - kx(t) - l$$

coincide, salvo un factor constante, con la distancia entre el punto (t) de la curva γ y la recta g. Pero, como g es una asíntota, se tiene

$$y(t) - kx(t) - l \to 0 \qquad (*)$$

cuando $t \to a$.

Debe ser $x(t) \to \infty$ cuando $t \to a$ ya que, de lo contrario, la expresión $y(t) - kx(t) - l$ no puede permanecer acotada para $t \to a$ $(x^2(t) + y^2(t) \to \infty)$. Pero entonces de (*) resulta

$$\frac{y(t)}{x(t)} \to k$$

e

$$y(t) - kx(t) \to l.$$

Hemos demostrado la necesidad.

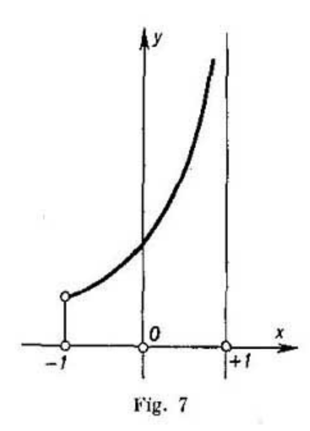


Fig. 7

Suficiencia. Puesto que para $t \to a$

$$\frac{y(t)}{x(t)} \to k \text{ e } y(t) - kx(t) \to l,$$

resulta

$$y(t) - kx(t) - l \to 0.$$

Pero esto significa que el punto (t) de la curva γ se acerca indefinidamente, cuando $t \to a$, a la recta

$$y - kx - l = 0,$$

que es, por consiguiente, la asíntota.

Hemos demostrado el teorema.

Ejemplo. La curva

$$x = t, \; y = \frac{1}{1-t} \quad (-1 < t < 1)$$

(rama de hipérbola) se extiende infinitamente cuando $t \to 1$ (fig. 7).

Para $t \to 1$ se tiene

$$\frac{x(t)}{y(t)} \to 0 \quad \text{y} \quad x(t) - 0 \cdot y(t) \to 1.$$

La curva tiene, por lo tanto, la asíntota

$$x - 1 = 0.$$

Consideremos ahora el problema sobre las asíntotas de una curva definida implícitamente por la ecuación

$$\varphi(x, y) = 0.$$

Según hemos señalado, la ecuación $\varphi(x, y) = 0$ define la curva únicamente en el sentido de que los puntos de la curva satisfacen la ecuación $\varphi(x, y) = 0$ aun cuando con éstos no se agoten, hablando en términos generales, todos los puntos del plano que cumplen esta condición. El problema sobre la determinación de las asíntotas de la curva dada por la ecuación $\varphi(x, y) = 0$ no es un problema plenamente definido: es posible indicar solamente un conjunto de rectas que contiene las asíntotas.

Nos limitaremos al caso de curvas algebraicas (en el que $\varphi(x, y)$ es un polinomio respecto a las variables x e y).

Sea $(\bar{x}, \bar{y})$ un punto arbitrario de la asíntota y sean

$$x = \bar{x} + \lambda u, \quad y = \bar{y} + \mu u$$

las ecuaciones paramétricas de la asíntota. Designemos por $Q(u)$ el punto de la curva más próximo al punto (u) de la asíntota. Las coordenadas del punto $Q(u)$ serán

$$x(u) = \bar{x} + \lambda u + \xi(u),$$

$$y(u) = \bar{y} + \mu u + \eta(u),$$

donde

$$\xi(u) \quad \text{y} \quad \eta(u) \to 0 \quad \text{cuando} \quad u \to \infty.$$

Indiquemos por φ_k el conjunto de términos de grado k en el polinomio φ. Entonces

$$\varphi = \varphi_n + \varphi_{n-1} + \ldots + \varphi_0.$$

Introduciendo $x = x(u)$ e $y = y(u)$ en $\varphi(x, y)$ y despejando los términos que contienen u^n y u^{n-1}, obtendremos

$$\varphi(x(u), y(u)) = u^n \varphi_n(\lambda, \mu) + u^{n-1}\{\bar{x}(\varphi_n(\lambda, \mu))'_\lambda +$$

$$+ \bar{y}(\varphi_n(\lambda, \mu))'_\mu + \varphi_{n-1}(\lambda, \mu)\} + \ldots$$

En el segundo miembro de la igualdad no aparecen los términos de grado inferior a u^{n-1}.

Puesto que $\varphi(x(u), y(u)) \equiv 0$ y, por consiguiente,

$$\frac{1}{u^n}\varphi(x(u), y(u)) \to 0 \text{ para } u \to \infty,$$

resulta $\varphi_n(\lambda, \mu) = 0$.

Análogamente obtenemos

$$\bar{x}(\varphi_n(\lambda, \mu))'_\lambda + \bar{y}(\varphi_n(\lambda, \mu))'_\mu + \varphi_{n-1}(\lambda, \mu) = 0.$$

Puesto que $(\bar{x}, \bar{y})$ es un punto arbitrario de la asíntota, esta igualdad es la ecuación de la asíntota.

Ejemplo. Hallar las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola

$$x^2 - 3xy + 2y^2 + x + 1 = 0.$$

Tenemos

$$\varphi_2(\lambda, \mu) = \lambda^2 - 3\lambda\mu + 2\mu^2 = 0.$$

Para λ y μ de aquí obtenemos, salvo un factor sin importancia, dos sistemas de valores $\lambda = 1$, $\mu = 1$ y $\lambda = 2$, $\mu = 1$. Introduciendo estos valores en la fórmula deducida anteriormente, hallamos las asíntotas:

$$-\bar{x} + \bar{y} + 1 = 0, \quad \bar{x} - 2\bar{y} + 2 = 0.$$

EJERCICIOS PARA EL CAPITULO I

1. El punto M se desplaza en el espacio de modo que su proyección sobre el plano xy se mueve uniformemente sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ con velocidad angular ω y su proyección sobre el eje z se desliza uniformemente con velocidad c. La curva que describe el punto M se denomina *hélice simple*. Hallar la ecuación paramétrica de la hélice tomando el tiempo t como parámetro y aceptando que en el momento inicial ($t = 0$) el punto M tiene las coordenadas a, 0, 0.

Respuesta. $x = a\cos\omega t$, $y = a \operatorname{sen} \omega t$, $z = ct$.

2. La hélice simple (ejercicio 1) se proyecta sobre el plano xy mediante un haz de rectas paralelas que forman el ángulo ϑ con el eje z. Hallar la ecuación de la proyección. ¿Para qué valores de ϑ la proyección tendrá puntos singulares? Aclarar el carácter de los puntos singulares.

Respuesta. Si el haz de rectas proyectantes es paralelo al plano Oyz, las ecuaciones de la proyección serán

$$x = a\cos\omega t, \quad y = ct \operatorname{tg}\vartheta + a \operatorname{sen}\omega t.$$

La proyección tendrá puntos singulares si $\operatorname{tg}\vartheta = \pm\frac{a\omega}{c}$. Los puntos singulares serán puntos de retroceso de primera especie.

3. Una circunferencia de radio a rueda uniformemente sin resbalar sobre una recta g con velocidad v. Hallar la ecuación de la curva γ que describe un punto M ligado fijamente a la circunferencia. ¿En qué condiciones la curva γ tendrá puntos singulares? Aclarar el carácter de los puntos singulares.

Respuesta. Si la recta g se toma por el eje x y si en el momento inicial el punto M se encuentra sobre el eje y por debajo del centro de la circunferencia, las ecuaciones de la curva γ serán:

$$x = vt - b \operatorname{sen} \frac{vt}{a}, \qquad y = a - b \cos \frac{vt}{a},$$

donde b es la distancia del punto M al centro de la circunferencia. La curva γ tiene puntos singulares si el punto M se halla sobre la circunferencia (en este caso la curva γ se denomina *cicloide*). Los puntos singulares son puntos de retroceso de primera especie.

4. Demostrar que la curva definida por la ecuación

$$|x|^{\frac{2}{3}} + |y|^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \quad (astroide)$$

es una curva analítica. Hallar sus puntos singulares. Aclarar el carácter de los puntos singulares.

Respuesta. La curva admite una parametrización analítica obvia

$$x = a \cos^3 t, \; y = a \operatorname{sen}^3 t$$

y, por consiguiente, es analítica. Puntos singulares: $(0, a)$, $(0, -a)$, $(a, 0)$ y $(-a, 0)$. Los puntos singulares son puntos de retroceso de primera especie.

5. Hallar las ecuaciones de las asíntotas de las curvas:

1. $x = a \operatorname{sen} t$,

$$y = a\left(\cos t + \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2}\right) \quad (tractriz).$$

2. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ (*folium de Descartes*).

Respuesta.

1. $x = 0$.
2. $x + y + a = 0$.

PROBLEMAS Y TEOREMAS PARA EL CAPITULO I

1. Sea

$$x = x(t), \; y = y(t), \; z = z(t)$$

alguna parametrización de una curva elemental. Entonces, cualquier otra parametrización es de la forma

$$x = x(\sigma, (\tau)), \; y = y(\sigma(\tau)), \; z = z(\sigma(\tau)),$$

donde $\sigma(\tau)$ es una función continua estrictamente monótona.

2. ¿Qué grado de regularidad de la curva definida por la ecuación implícita $\varphi(x, y) = 0$ puede garantizarse si la función φ es n veces diferenciable y $\varphi_x^2 + \varphi_y^2 \neq 0$? ¿Puede tener la curva un grado de regularidad superior? Dar un ejemplo.

3. Dar un ejemplo de una curva que no admite parametrización suave de ninguna de sus partes.

4. Sea γ una curva analítica plana definida en un entorno del punto (x_0, y_0) mediante la ecuación $\varphi(x, y) = 0$, donde φ es una función analítica. Supongamos que en el punto (x_0, y_0) son iguales a cero la función φ y todas sus derivadas hasta la de orden $n-1$. Demostrar que, siendo reales y distintas todas las raíces del polinomio

$$P(\xi) = \sum_{k+l=n} \xi^k \frac{\partial^n \varphi}{\partial x^k \partial y^l}\bigg|_{(x_0,\, y_0)},$$

el punto (x_0, y_0) es un punto regular de la curva γ en el sentido de la definición del § 3.

5. Hallar las condiciones de existencia (análogas a las obtenidas en el § 4 para la curva plana) de una asíntota de una curva espacial $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ que se extiende infinitamente cuando $t \to a$.

Obtener la ecuación de la asíntota.

6. Hallar (por un procedimento análogo al aplicado en el § 4 para las curvas planas) la ecuación de las asíntotas de una curva espacial algebraica definida implícitamente por las ecuaciones

$$\varphi(x, y, z) = 0, \quad \psi(x, y, z) = 0,$$

donde φ y ψ son polinomios respecto a x, y y z.

CAPITULO II

ELEMENTOS DE CURVAS RELACIONADOS CON EL CONCEPTO DE CONTACTO

Sean M y $\overline{M}$ dos conjuntos de puntos del espacio que poseen un punto común O. Sean X un punto arbitrario del conjunto M, $h(X)$ su distancia al conjunto $\overline{M}$ (extremo inferior de las distancias entre los puntos del conjunto $\overline{M}$ y el punto X) y $d(X)$ la distancia del punto X al punto O.

Diremos que el conjunto $\overline{M}$ *tiene contacto* con el conjunto M en el punto O si el cociente $h(X)(d(X))^{-\alpha}$ $(\alpha > 1)$ tiende a cero cuando el punto X se aproxima al punto O tanto como se quiera.

Empleando el concepto de contacto, se introducen muchos conceptos para las curvas. Los consideraremos en este capítulo.

§ 1. Función vectorial de argumento escalar

En lo que sigue utilizaremos ampliamente los medios rudimentarios del análisis vectorial. Con vista a ello, recordaremos la definición de algunos conceptos.

Sea G un conjunto cualquiera de puntos de una recta, de un plano o del espacio. Diremos que se ha definido una *función vectorial* f sobre el conjunto G si a cada punto X de este conjunto se hace corresponder un vector $f(X)$.

Para las funciones vectoriales, igual que en el análisis para las funciones escalares, se introduce el concepto de *límite*. Se dice que $f(X) \to a$ cuando $X \to X_0$ si $|f(X) - a| \to 0$ cuando $X \to X_0$.

Para las funciones vectoriales tienen lugar teoremas referentes al límite análogos a los teoremas referentes al límite para las funciones escalares.

Por ejemplo, *si $f(X)$ y $g(X)$ son funciones vectoriales y $\lambda(X)$ es una función escalar y si $f(X) \to a$, $g(X) \to b$ y $\lambda(X) \to m$ cuando $X \to X_0$, entonces*

$$
\begin{gathered}
f(X) \pm g(X) \to a \pm b, \\
\lambda(X) \cdot f(X) \to m \cdot a, \\
f(X) \cdot g(X) \to a \cdot b, \\
f(X) \times g(X) \to a \times b.
\end{gathered}
$$

La demostración de estas proposiciones no difiere, hablando en términos generales, de la que se da en el análisis para las funciones escalares. A título de ejemplo, demostremos la última proposición. Tenemos

$$
\begin{aligned}
&|f(X) \times g(X) - a \times b| = \\
&\quad = |(f(X) - a) \times (g(X) - b) + (f(X) - a) \times b - \\
&\quad - (g(X) - b) \times a| \leqslant |f(X) - a|\,|g(X) - b| + \\
&\quad + |f(X) - a|\,|b| + |g(X) - b|\,|a|.
\end{aligned}
$$

De aquí se deduce que $|f(X) \times g(X) - a \times b| \to 0$ cuando $X \to X_0$. Pero ello significa que $f(X) \times g(X) \to a \times b$.

Para las funciones vectoriales se introduce el concepto de *continuidad* del mismo modo que para las funciones

escalares. A saber, la función $f(X)$ se denomina *continua en el punto* X_0 si $f(X) \to f(X_0)$ cuando $X \to X_0$.

Sean $f(X)$ y $g(X)$ *dos funciones vectoriales continuas en el punto* X_0 *y sea* $\lambda(X)$ *una función escalar continua en este punto. Entonces, las funciones vectoriales*

$$\lambda(X) f(X), \quad f(X) \pm g(X) \quad y \quad f(X) \times g(X),$$

así como la función escalar $f(X) \cdot g(X)$ *son continuas en el punto* X_0.

Esta propiedad de la continuidad es un corolario simple de las propiedades referentes al límite.

Concepto de derivada. Sea $f(t)$ una función vectorial definida en un intervalo. Diremos que la función vectorial f tiene *derivada* en el punto t del segmento si existe el límite del cociente

$$\frac{f(t+h) f - (t)}{h}$$

cuando $h \to 0$. La derivada en el punto t se designa por $f'(t)$.

Si $f(t)$ *y* $g(t)$ *son funciones vectoriales diferenciables en el punto* t *y* $\lambda(t)$ *es una función escalar diferenciable en este punto, entonces* $\lambda(t) f(t)$, $f(t) \pm g(t)$, $f(t) \times g(t)$ *y* $f(t) g(t)$ *son funciones diferenciables en el punto* t *con la particularidad de que*

$$(\lambda f)' = \lambda' f + \lambda f',$$
$$(f \pm g)' = f' \pm g',$$
$$(f \times g)' = f' \times g + f \times g',$$
$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Estas fórmulas de derivación se obtienen absolutamente del mismo modo que las correspondientes fórmulas de derivación de funciones escalares en el análisis.

La derivada de la función vectorial $f'(t)$ se denomina *segunda derivada de la función* $f(t)$ y se designa por $f''(t)$. Análogamente se definen la tercera, la cuarta, etc. derivadas.

Toda función que tiene derivadas continuas hasta el orden k-ésimo inclusive en un segmento (a, b) se denomina *función diferenciable k veces sobre este segmento*.

Sean e_1, e_2, e_3 tres vectores no pertenecientes a un mismo plano. Todo vector $\boldsymbol{r}$ admite una representación de forma

$$\boldsymbol{r} = xe_1 + ye_2 + ze_3;$$

los números x, y y z se determinan unívocamente y se denominan *coordenadas del vector* $\boldsymbol{r}$ respecto a la base e_1, e_2 y e_3.

Sea $\boldsymbol{r}(t)$ una función vectorial definida en un segmento. Definamos tres funciones escalares $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ mediante la condición

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\, e_1 + y(t)\, e_2 + z(t)\, e_3.$$

Entonces, *si las funciones $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ son continuas o diferenciables, la función vectorial $\boldsymbol{r}(t)$ es continua o diferenciable, respectivamente. Viceversa, si la función vectorial $\boldsymbol{r}(t)$ es continua o diferenciable, las funciones $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ son continuas o diferenciables, respectivamente.*

Para demostrar la segunda afirmación, multipliquemos escalarmente la igualdad $\boldsymbol{r}(t) = x(t)\, e_1 + y(t)\, e_2 + z(t)\, e_3$ por un vector e_1' perpendicular a los vectores e_2 y e_3. Obtendremos $x(t)\,(e_1 e_1') = \boldsymbol{r}(t)\, e_1'$. De aquí resulta que la continuidad o la diferenciabilidad de la función vectorial $\boldsymbol{r}(t)$ implica la continuidad o la diferenciabilidad, respectivamente, de la función $x(t)$. Razonamientos análogos son aplicables a las funciones $y(t)$ y $z(t)$.

Para las funciones vectoriales tiene lugar la fórmula de Taylor. A saber, si $\boldsymbol{f}(t)$ es una función n veces diferenciable, entonces

$$\boldsymbol{f}(t+\Delta t) = \boldsymbol{f}(t) + \Delta t \boldsymbol{f}'(t) + \ldots + \frac{\Delta t^n}{n!}(\boldsymbol{f}^{(n)}(t) + \boldsymbol{\varepsilon}(t, \Delta t)),$$

donde $|\boldsymbol{\varepsilon}(t, \Delta t)| \to 0$ *cuando* $\Delta t \to 0$.

En efecto,

$$\boldsymbol{f}(t) = x(t)\, e_1 + y(t)\, e_2 + z(t)\, e_3.$$

Pero

$$x(t+\Delta t) = x(t) + \Delta t x'(t) + \ldots + \frac{\Delta t^n}{n!}(x^{(n)}(t) + \varepsilon_1),$$

$$y(t+\Delta t) = y(t) + \Delta t y'(t) + \ldots + \frac{\Delta t^n}{n!}(y^{(n)}(t) + \varepsilon_2),$$

$$z(t+\Delta t) = z(t) + \Delta t z'(t) + \ldots + \frac{\Delta t^n}{n!}(z^{(n)}(t) + \varepsilon_3),$$

Multiplicando estas igualdades por e_1, e_2 y e_3, respectivamente, sumándolas y observando que $x^{(h)}(t)\,e_1 + y^{(h)}(t)\,e_2 + z^{(h)}(t)\,e_3 = f^{(h)}(t)$, obtenemos la fórmula de Taylor para la función vectorial $f(t)$.

Para la función vectorial el concepto de la integral en el sentido de Riemann se introduce del mismo modo absolutamente que para la función escalar. La integral de una función vectorial posee las propiedades corrientes. A saber, *si $f(t)$ es una función vectorial continua en el segmento $a \leqslant t \leqslant b$ y si $a < c < b$, entonces*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt.$$

Si m es una constante, entonces

$$\int_a^b m f(t)\,dt = m \int_a^b f(t)\,dt.$$

Si r es un vector constante, entonces

$$\int_a^b r f(t)\,dt = r \int_a^b f(t)\,dt,$$

$$\int_a^b r \times f(t)\,dt = r \times \int_a^b f(t)\,dt.$$

Tiene lugar la fórmula de derivación de la integral indefinida

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)\,dt = f(x).$$

Para terminar notemos que la definición paramétrica de una curva mediante las ecuaciones

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

equivale a su definición mediante una sola ecuación vectorial

$$r = r(t) = x(t)\,e_1 + y(t)\,e_2 + z(t)\,e_3,$$

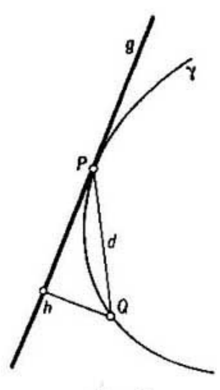


Fig. 8

donde e_1, e_2 y e_3 son vectores unitarios cuyas direcciones coinciden con las de los ejes de coordenadas x, y y z.

§ 2. Tangente a una curva

Sean γ una curva, P un punto de la misma y g una recta que pasa por el punto P. Tomemos sobre la curva un punto Q y designemos por d y h sus distancias hasta el punto P y la recta g, respectivamente.

Diremos que la recta g es *tangente* a la curva γ en el punto P si $\frac{h}{d} \to 0$ cuando $Q \to P$ (fig. 8).

Si la curva γ tiene tangente en el punto P, la recta PQ tiende hacia esta tangente cuando $Q \to P$. Recíprocamente, si la recta PQ tiende hacia una recta g cuando $Q \to P$, esta última es la tangente. Para demostrar esta afirmación basta observar que $\frac{h}{d}$ es el seno del ángulo que forman las rectas g y PQ.

Teorema. Una curva suave γ tiene en todo punto una tangente y ésta es única. Si

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$$

es la ecuación vectorial de la curva, la tangente en el punto P, correspondiente al valor t del parámetro, tiene la dirección del vector $\boldsymbol{r}'(t)$.

Demostración. Supongamos que la curva γ tiene una tangente g en el punto P, correspondiente al valor t del parámetro. Sea $\boldsymbol{\tau}$ el vector unitario cuya dirección es la de la recta g. La distancia d entre el punto Q, correspondiente al valor $t+\Delta t$ del parámetro, y el punto P es igual a $|\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)|$. La distancia h del punto Q a la tangente es igual a $|(\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t))\times\boldsymbol{\tau}|$. Según la definición de tangente,

$$\frac{h}{d}=\frac{|(\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t))\times\boldsymbol{\tau}|}{|\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)|}\to 0 \text{ para } \Delta t\to 0.$$

Pero

$$\frac{|(\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t))\times\boldsymbol{\tau}|}{|\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)|}=\frac{\left|\dfrac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}\times\boldsymbol{\tau}\right|}{\left|\dfrac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}\right|}\to\frac{|\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{\tau}|}{|\boldsymbol{r}'(t)|}.$$

De aquí resulta que

$$\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{\tau}=0.$$

Pero esto es posible sólo si el vector $\boldsymbol{\tau}$ tiene la dirección del vector $\boldsymbol{r}'(t)$. Por lo tanto, si la tangente existe, tiene la dirección del vector $\boldsymbol{r}'(t)$ y, por consiguiente, es única.

También es cierto que la recta g que pasa por el punto P y tiene la dirección del vector $\boldsymbol{r}'(t)$ es la tangente, ya que para esta recta, según los razonamientos anteriores, se tiene

$$\frac{h}{d}=\frac{\left|(\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t))\times\dfrac{\boldsymbol{r}'(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)|}\right|}{|\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)|}\to\frac{|\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}'(t)|}{|\boldsymbol{r}'(t)|^2}=0.$$

Hemos demostrado completamente el teorema.

Conociendo la dirección de la tangente, es fácil encontrar su ecuación. Efectivamente, si la curva está dada por la ecuación vectorial $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$, el vector $\tilde{\boldsymbol{r}}$ de un punto arbitrario de la tangente puede ser representado así:

$$\tilde{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{r}(t)+\lambda\boldsymbol{r}'(t).$$

Esta es precisamente la ecuación de la tangente en la forma paramétrica (siendo λ el parámetro).

Deduzquemos la ecuación de la tangente para los distintos casos de la representación analítica de la curva.

Supongamos que la curva está dada por las ecuaciones en forma paramétrica

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

Esta representación equivale a la representación vectorial

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = x(t)\, \boldsymbol{e}_1 + y(t)\, \boldsymbol{e}_2 + z(t)\, \boldsymbol{e}_3,$$

donde $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ y $\boldsymbol{e}_3$ son los vectores unitarios de los ejes de coordenadas. Sustituyendo la ecuación vectorial

$$\tilde{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}(t) + \lambda \boldsymbol{r}'(t)$$

por tres ecuaciones escalares, obtenemos las ecuaciones de la tangente en el caso de la representación paramétrica

$$\tilde{x} = x(t) + \lambda x'(t), \; \tilde{y} = y(t) + \lambda y'(t),$$
$$\tilde{z} = z(t) + \lambda z'(t)$$

o, en forma equivalente,

$$\frac{\tilde{x} - x(t)}{x'(t)} = \frac{\tilde{y} - y(t)}{y'(t)} = \frac{\tilde{z} - z(t)}{z'(t)}.$$

Si la curva es plana y viene dada por las ecuaciones

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

la ecuación de la tangente queda así:

$$\frac{\tilde{x} - x(t)}{x'(t)} = \frac{\tilde{y} - y(t)}{y'(t)}.$$

Si la curva viene dada por las ecuaciones

$$y = y(x), \quad z = z(x), \qquad (*)$$

la ecuación de la tangente se obtiene directamente de las ecuaciones de la tangente para el caso de la representación paramétrica de la curva. Basta observar que la representación de la curva por medio de las ecuaciones (*) equivale a la representación paramétrica

$$x = t, \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

Las ecuaciones de la tangente para la curva dada por las ecuaciones (*) quedan así:

$$\tilde{x}-x=\frac{\tilde{y}-y(x)}{y'(x)}=\frac{\tilde{z}-z(x)}{z'(x)}$$

o, en forma equivalente,

$$\tilde{y}=y(x)+y'(x)(\tilde{x}-x),$$
$$\tilde{z}=z(x)+z'(x)(\tilde{x}-x).$$

En particular, si la curva es plana y viene dada por la ecuación $y=y(x)$, la ecuación de la tangente a esta curva será

$$\tilde{y}=y(x)+y'(x)(\tilde{x}-x).$$

Encontremos, por último, la ecuación de la tangente para la curva definida mediante las ecuaciones

$$\varphi(x, y, z)=0, \quad \psi(x, y, z)=0$$

en el punto (x_0, y_0, z_0) en el cual el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix}\varphi_x & \varphi_y & \varphi_z\\ \psi_x & \psi_y & \psi_z\end{pmatrix}$$

es igual a dos. Sea

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t)$$

una parametrización regular de la curva en un entorno del punto (x_0, y_0, z_0).

La ecuación de la tangente a la curva en el punto (x_0, y_0, z_0) es

$$\frac{\tilde{x}-x_0}{x_0'}=\frac{\tilde{y}-y_0}{y_0'}=\frac{\tilde{z}-z_0}{z_0'}.$$

Es decir, para obtener las ecuaciones de la tangente basta conocer las razones $x_0' : y_0' : z_0'$. Calculemos estas razones. Tenemos las identidades

$$\varphi(x(t), y(t), z(t))\equiv 0 \quad \text{y} \quad \psi(x(t), y(t), z(t))_0\equiv 0.$$

Derivando respecto a t estas identidades, encontramos:

$$\varphi_x x'+\varphi_y y'+\varphi_z z'=0,$$
$$\psi_x x'+\psi_y y'+\psi_z z'=0,$$

De aquí resulta

$$\frac{x'}{\begin{vmatrix}\varphi_y & \varphi_z\\ \psi_y & \psi_z\end{vmatrix}}=\frac{y'}{\begin{vmatrix}\varphi_z & \varphi_x\\ \psi_z & \psi_x\end{vmatrix}}=\frac{z'}{\begin{vmatrix}\varphi_x & \varphi_y\\ \psi_x & \psi_y\end{vmatrix}}$$

y la ecuación de la tangente toma la forma

$$\frac{\tilde{x}-x_0}{\begin{vmatrix}\varphi_y & \varphi_z\\ \psi_y & \psi_z\end{vmatrix}}=\frac{\tilde{y}-y_0}{\begin{vmatrix}\varphi_z & \varphi_x\\ \psi_z & \psi_x\end{vmatrix}}=\frac{\tilde{z}-z_0}{\begin{vmatrix}\varphi_x & \varphi_y\\ \psi_x & \psi_y\end{vmatrix}},$$

donde las derivadas $\varphi_x, \varphi_y, \ldots, \psi_z$ se calculan en el punto de tangencia (x_0, y_0, z_0).

Si la curva es plana y viene dada por la ecuación $\varphi(x, y) = 0$, la ecuación de la tangente será

$$\frac{\tilde{x}-x_0}{\varphi_y}=\frac{\tilde{y}-y_0}{-\varphi_x}.$$

Para deducir esta ecuación basta observar que la representación de la curva en el plano xy mediante la ecuación $\varphi(x, y) = 0$ equivale a su representación en el espacio mediante las ecuaciones

$$\varphi(x, y) = 0 \quad \text{y} \quad z = 0.$$

Se denomina plano *normal* a una curva en un punto P el plano que pasa por el punto P y que es perpendicular a la tangente en este punto. No ofrece dificultad encontrar la ecuación de este plano una vez obtenida la ecuación de la tangente para cualquier caso de representación analítica de la curva; proponemos esto como un ejercicio sencillo.

§ 3. Plano osculador a una curva

Sean γ una curva, P un punto de la misma y α un plano que pasa por el punto P. Designemos por h la distancia entre un punto arbitrario Q de la curva y el plano α y por d la distancia de este punto al punto P.

Diremos que el plano α es un plano *osculador* a la curva γ en el punto P si la razón $\frac{h}{d^2} \to 0$ cuando $Q \to P$ (fig. 9).

Teorema. Una curva γ regular (por lo menos dos veces continuamente diferenciable) tiene en todo punto un plano

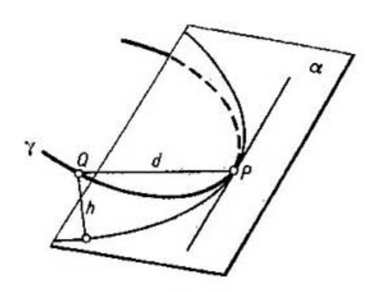


Fig. 9

osculador con la particularidad de que el plano osculador es único o bien es osculador cualquier plano que contiene la tangente a la curva. Si

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$$

es la ecuación de la curva γ, *el plano osculador en el punto correspondiente al valor* t *del parámetro es paralelo a los vectores* $\boldsymbol{r}'(t)$ *y* $\boldsymbol{r}''(t)$.

Demostración. Sea α el plano osculador a la curva γ en el punto P correspondiente al valor t del parámetro. Designemos por e el vector unitario de la normal al plano α. La distancia entre el punto Q, correspondiente al valor $t + \Delta t$ del parámetro, y el plano α es

$$h = | e(\boldsymbol{r}(t + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t)) |.$$

La distancia de este punto al punto P es

$$d = | \boldsymbol{r}(t + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t) |.$$

Tenemos

$$\frac{h}{d^2} = \frac{| e(\boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t)) |}{(\boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t))^2} =$$

$$= \frac{\left| e\left(\boldsymbol{r}'(t)\,\Delta t + \frac{\boldsymbol{r}''(t)}{2}\,\Delta t^2 + \varepsilon_1 \Delta t^2 \right) \right|}{(\boldsymbol{r}'(t)\,\Delta t + \varepsilon_2 \Delta t)^2} =$$

$$= \frac{\left| \frac{e\boldsymbol{r}'(t)}{\Delta t} + \frac{e\boldsymbol{r}''(t)}{2} + \varepsilon_1' \right|}{\boldsymbol{r}'^2(t) + \varepsilon_2'}.$$

Puesto que $|\boldsymbol{r}'(t)| \neq 0$ y $\frac{h}{d^2} \to 0$, ε_1' y $\varepsilon_2' \to 0$ cuando $\Delta t \to 0$, resulta que $\boldsymbol{e r}'(t)=0$ y $\boldsymbol{e r}''(t)=0$. Es decir, si el plano osculador existe, los vectores $\boldsymbol{r}'(t)$ y $\boldsymbol{r}''(t)$ son paralelos al mismo.

Es fácil persuadirse de que el plano osculador existe siempre. Tomemos con este fin el plano α paralelo a los vectores $\boldsymbol{r}'(t)$ y $\boldsymbol{r}''(t)$ (en cuanto al vector nulo, aceptamos que cualquier plano le es paralelo). Entonces $\boldsymbol{e r}'(t)= = \boldsymbol{e r}''(t) = 0$ y, por consiguiente,

$$\frac{h}{d^2} = \frac{|\varepsilon_1'|}{\boldsymbol{r}'^2(t) + \varepsilon_2'} \to 0 \text{ cuando } \Delta t \to 0.$$

Por lo tanto, en todo punto de una curva existe el plano osculador. Es obvio que el plano osculador, siendo paralelo a los vectores $\boldsymbol{r}'(t)$ y $\boldsymbol{r}''(t)$, es único si los vectores $\boldsymbol{r}'(t)$ y $\boldsymbol{r}''(t)$ no son paralelos. En cambio, si estos vectores son paralelos (o el vector $\boldsymbol{r}''(t) = 0$), cualquier plano que comprenda la tangente a la curva será un plano osculador.

Hemos demostrado el teorema.

Obtengamos la ecuación del plano osculador. Sea $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ la ecuación vectorial de la curva y sea t el valor del parámetro correspondiente al punto P de la curva. Supongamos que en este punto los vectores $\boldsymbol{r}'(t)$ y $\boldsymbol{r}''(t)$ no son paralelos. Entonces $\boldsymbol{r}'(t) \times \boldsymbol{r}''(t)$ será el vector de la normal al plano osculador. Si designamos por $\tilde{\boldsymbol{r}}$ el vector de un punto cualquiera del plano osculador referente al punto P, los vectores $\tilde{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{r}(t)$ y $\boldsymbol{r}'(t) \times \times \boldsymbol{r}''(t)$ resultan perpendiculares. De aquí que la ecuación del plano osculador sea

$$(\tilde{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{r}(t))(\boldsymbol{r}'(t) \times \boldsymbol{r}''(t)) = 0$$

o

$$(\tilde{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{r}(t),\ \boldsymbol{r}'(t),\ \boldsymbol{r}''(t)) = 0.$$

Para el caso de la representación paramétrica de la curva

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

de esta ecuación se obtiene la ecuación del plano osculador en la forma

$$\begin{vmatrix} \tilde{x}-x(t) & \tilde{y}-y(t) & \tilde{z}-z(t) \\ x'(t) & y'(t) & z'(t) \\ x''(t) & y''(t) & z''(t) \end{vmatrix} = 0.$$

Dejamos a cargo del lector la deducción de las ecuaciones del plano osculador en los restantes casos de la representación analítica de una curva.

Toda recta que pasa por un punto de la curva y es perpendicular a la tangente se denomina *normal* a la curva. En el caso en el que el plano osculador es único, entre estas rectas destacan dos rectas notables: *la normal principal*, que es la normal perteneciente al plano osculador, y *la binormal*, que es la normal perpendicular al plano osculador. Puesto que ya se conocen las ecuaciones de la tangente y del plano osculador, no ofrece dificultad deducir las ecuaciones de la normal principal y de la binormal; a título de ejercicio proponemos al lector obtener estas ecuaciones.

§ 4. Contacto de curvas

Sean γ y γ' dos curvas elementales con un punto común O. Tomemos en la curva γ' un punto P y designemos por h su distancia hasta la curva γ y por d, su distancia al punto O.

Diremos que la curva γ' tiene con la curva γ en el punto O un *contacto de orden n* si la razón

$$\frac{h}{d^n} \to 0 \text{ cuando } P \to O \text{ (fig. 10).}$$

Sean γ y γ' dos curvas generales con un punto común O. Diremos que la curva γ' tiene con la curva γ en el punto O un contacto de orden n si un entorno elemental del punto O de la curva γ' tiene un contacto de orden n con un entorno elemental de la curva γ.

Teorema. Sean γ y γ' dos curvas regulares planas, $\varphi(x, y) = 0$ la ecuación de la curva γ y $x = x(t)$, $y = y(t)$ las ecuaciones de la curva γ'. Supongamos que $\varphi_x^2 + \varphi_y^2 \neq 0$ en el punto $O(x_0, y_0)$. Entonces para que

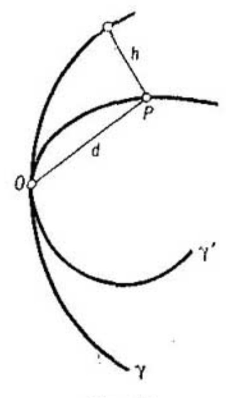


Fig. 10

la curva γ' tenga en el punto O un contacto de orden n con la curva γ, es necesario y suficiente que para el valor t correspondiente al punto O se cumplan las condiciones:

$$\varphi(x(t),\ y(t)) = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\varphi(x(t),\ y(t)) = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^n}{dt^n}\varphi(x(t),\ y(t)) = 0.$$

Demostración. Sea M un punto de la curva γ'. Por definición, su distancia $h(M)$ hasta la curva γ es el extremo inferior de las distancias de los puntos de la curva γ al punto M. Si los puntos M y O son suficientemente próximos, este extremo inferior se alcanza en un punto $\overline{M}$ de la curva γ.

Demostremos que el segmento $M\overline{M}$ va en dirección de la normal a la curva γ en el punto $\overline{M}$. En efecto, sea $\overline{r}(s)$ el vector de un punto de la curva γ y sea $\boldsymbol{m}$ el vector del punto M. El cuadrado de la distancia entre el punto M

y el punto de la curva es igual a $(\bar{r}(s) - m)^2$. Para el valor de s correspondiente al mínimo de esta distancia, tenemos

$$\frac{d}{ds}(\bar{r}(s) - m)^2 = 0,$$

de donde $(\bar{r}(s) - m)\,\bar{r}'(s) = 0$ lo que significa que el vector $M\bar{M}$ va en dirección de la normal a la curva γ en el punto $\bar{M}$.

Sean ξ y η los cosenos directores de la recta $M\bar{M}$. Las coordenadas del punto $\bar{M}$ se pueden expresar a través de las coordenadas del punto M del modo siguiente:

$$\bar{x} = x + \xi h \quad \text{e} \quad \bar{y} = y + \eta h,$$

donde h es la distancia entre el punto M y la curva γ.

Las coordenadas $\bar{x}$ e $\bar{y}$ del punto $\bar{M}$ satisfacen, por ser éste un punto de la curva γ, la ecuación $\varphi(x, y) = 0$. Es decir,

$$\varphi(x + \xi h,\ y + \eta h) = 0.$$

De aquí resulta que

$$\varphi(x, y) + \xi h \varphi_x(x, y) + \eta h \varphi_y(x, y) + h^2 R = 0,$$

donde R es una magnitud acotada en un entorno del punto $O(x_0, y_0)$.

Si $x \to x_0$ e $y \to y_0$, la expresión $\xi\varphi_x + \eta\varphi_y$ tiende a un límite distinto de cero ya que representa el producto escalar de dos vectores de coordenadas ξ, η y φ_x, φ_y que en el límite son distintos de cero y están dirigidos según la normal a la curva γ en el punto O. Por lo tanto, la magnitud $h = \frac{-\varphi}{\xi\varphi_x + \eta\varphi_y} - h^2 R'$ es del mismo orden que φ cuando $M \to O$.

Supongamos que el punto M de la curva γ' corresponde al valor t del parámetro. Entonces, su distancia al punto O, igual a

$$|\,r(t) - r(t_0)\,| = |\,(t - t_0)(r'(t_0) + \varepsilon)\,|,$$

es de orden $|\,t - t_0\,|$ si M es suficientemente próximo a O. De aquí se deduce que para que la curva γ' tenga con la curva γ en el punto O un contacto de orden n

es necesario y suficiente que

$$\frac{\varphi(x(t)), y(t))}{(t-t_0)^n} \to 0 \text{ cuando } t \to t_0.$$

Pero esto significa que en el desarrollo de la función $\varphi(x(t), y(t))$ según las potencias de $(t - t_0)$ todos los términos hasta el n-ésimo inclusive son iguales a cero.

Hemos demostrado el teorema.

Ejemplo. Hallar la parábola de tipo

$$y - (a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n) = 0$$

que tenga un contacto de orden n con la curva

$$y = \varphi(x)$$

en el punto $(0, \varphi(0))$.

Según el teorema, para $x = 0$ y $k = 0, 1, \ldots, n$

$$\frac{d^k}{dx^k}(\varphi(x) - a_0 - a_1 x - \ldots - a_n x^n) = 0,$$

de donde

$$a_0 = \varphi(0), \; a_1 = \varphi'(0), \; \ldots, \; a_n = \frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(0).$$

La parábola buscada es

$$y = \varphi(0) + \varphi'(0)x + \frac{1}{2}\varphi''(0)x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(0)x^n.$$

§ 5. Envolvente de una familia de curvas dependientes de un parámetro

Sea $S\{\gamma_\alpha\}$ una familia de curvas suaves en el plano dependientes de un parámetro α. Una curva suave γ se denomina *envolvente* de la familia S si en cada uno de sus puntos es tangente al menos a una curva de la familia y si cualquier segmento de la misma es tangente a un conjunto infinito de curvas de la familia (fig. 11).

Ejemplo. Una curva suave carente de partes rectilíneas es la envolvente de sus tangentes.

El teorema que viene a continuación resuelve en cierta medida el problema sobre la determinación de la envolvente.

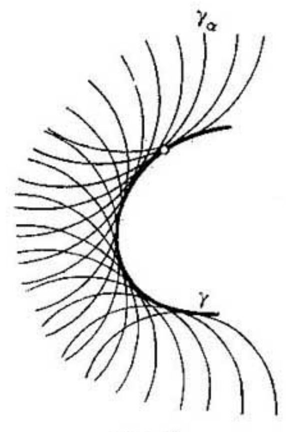


Fig. 11

Teorema. Supongamos que las curvas γ_α *de la familia* S *vienen dadas en una región* G *por las ecuaciones*

$$\varphi(x, y, \alpha) = 0, \quad a \leqslant \alpha \leqslant b,$$

donde φ *es una función continuamente diferenciable respecto a todos los argumentos que satisface la condición* $\varphi_x^2 + \varphi_y^2 \neq 0$. *Entonces la envolvente* γ *de la familia* S *(si es que existe) se determina por las ecuaciones*

$$\varphi(x, y, \alpha) = 0 \quad y \quad \varphi_\alpha(x, y, \alpha) = 0$$

en el sentido de que para todo punto (x, y) *de la envolvente se puede indicar un valor* α *tal que el sistema de los valores* x, y, *y* α *satisfará ambas ecuaciones* $\varphi = 0$ *y* $\varphi_\alpha = 0$.

Demostración. Sea $P(x, y)$ *un punto cualquiera de la envolvente* γ. *Pueden presentarse dos casos:*

1. Hay un conjunto infinito de curvas $\gamma_{\alpha 1}, \gamma_{\alpha 2}, \ldots$ de la familia tangentes en el punto P.

2. Hay sólo un número finito de curvas $\gamma_{\alpha 1}, \ldots, \gamma_{\alpha n}$ de la familia tangentes en el punto P.

Analicemos el primer caso. Sin perder generalidad, podemos aceptar que la sucesión de números α_k converge a un número α_0 ($a \leqslant \alpha_0 \leqslant b$). Puesto que el punto P pertenece a cada una de las curvas $\gamma_{\alpha k}$, se tiene $\varphi(x, y, \alpha_k) = 0$. De aquí que

$$\varphi(x, y, \alpha_k) - \varphi(x, y, \alpha_l) = (\alpha_k - \alpha_l)\, \varphi_\alpha(x, y, \alpha^*) = 0,$$

donde α^* está comprendido entre α_k y α_l. Por consiguiente, $\varphi_\alpha(x, y, \alpha^*) = 0$. Pero α_k y $\alpha_l \to \alpha_0$ cuando k y $l \to \infty$; por esto,

$$\varphi(x, y, \alpha_0) = 0 \quad \text{y} \quad \varphi_\alpha(x, y, \alpha_0) = 0$$

y en el primer caso queda demostrado el teorema.

Consideremos el segundo caso. Supongamos que el teorema es falso y que, por consiguiente, $\varphi_\alpha(x, y, \alpha_k) \neq 0$ para cualquier α_k ($k = 1, 2, \ldots, n$).

Designemos por ω_k^ε un ε-entorno cerrado del punto α_k en el segmento (a, b) y por δ un segmento pequeño de la envolvente γ que comprende el punto P. Si fijamos ε y tomamos δ suficientemente pequeño, para toda curva γ_α tangente a δ el valor α pertenecerá a uno de los entornos ω_k^ε. Si aceptamos lo contrario, llegaremos fácilmente a la conclusión de que en el punto P es tangente a la curva γ una curva de la familia distinta de las $\gamma_{\alpha k}$ lo cual es imposible.

Designemos por m_k el conjunto de puntos del segmento δ en los que son tangentes las curvas γ_α con $\alpha \subset \omega_k^\varepsilon$. Es obvio que m_k es un conjunto cerrado. Formemos el segmento $\bar{\delta}$, perteneciente a δ, que respecto a cada uno de los conjuntos m_k posee la siguiente propiedad: o bien el conjunto m_k comprende todo el segmento $\bar{\delta}$, o bien no contiene ningún punto del mismo. Es fácil construir el segmento $\bar{\delta}$. Primero construimos el segmento δ' tomando $\delta' = \delta$ si el segmento δ está íntegramente contenido en m_1, o tomando para δ' un segmento en el conjunto $\delta - m_1$ complementario de m_1 si δ no queda cubierto por m_1. Después, a partir del segmento δ' y del conjunto m_2, construimos de un modo análogo el segmento δ'', etc. Con un número finito de semejantes construcciones lle-

garemos a obtener el segmento $\overline{\delta}$ que posee las propiedades señaladas.

Supongamos que el conjunto m_k contiene el segmento $\overline{\delta}$. Siendo ε suficientemente pequeño, en un entorno del punto P la familia de curvas γ_α con $\alpha \subset \omega_k^\varepsilon$ puede ser definida mediante la ecuación

$$\psi(x, y) = \alpha,$$

donde $\psi(x, y)$ es una función continuamente diferenciable que satisface la condición $\psi_x^2 + \psi_y^2 \neq 0$. Esto resulta de nuestra hipótesis de que $\varphi_\alpha(x, y, \alpha_k) \neq 0$ en el punto P.

La curva γ en el segmento $\overline{\delta}$ puede ser definida mediante las ecuaciones $x = x(t)$ e $y = y(t)$, donde $x(t)$ e $y(t)$ son funciones continuamente diferenciables que cumplen la condición $x'^2 + y'^2 \neq 0$. Designemos por $\alpha(t)$ el valor del parámetro $\alpha \subset \omega_k^\varepsilon$ que corresponde a la curva γ_α tangente al segmento $\overline{\delta}$ en el punto $(x(t), y(t))$. Es obvio que

$$\alpha(t) = \psi(x(t), y(t))$$

es una función continuamente diferenciable. Tenemos

$$\alpha' = \psi_x x' + \psi_y y'.$$

Puesto que x' e y' son los componentes del vector tangente a la curva γ, ψ_x y ψ_y son los componentes del vector de la normal a la curva $\gamma_{\alpha(t)}$ y puesto que las curvas $\gamma_{\alpha(t)}$ y γ son tangentes en el punto (t), resulta que $\alpha' = 0$ y, por consiguiente, $\alpha = \text{const}$.

Es decir, sólo una curva de la familia γ_α con $\alpha \subset \omega_k^\varepsilon$ es tangente a la curva γ a lo largo del segmento $\overline{\delta}$ y, por consiguiente, en toda la familia S hay a lo sumo n curvas de este tipo. Pero, según la definición de la envolvente, debe haber un conjunto infinito. Llegamos a una contradicción. Hemos demostrado el teorema.

Nota. El sistema de ecuaciones

$$\varphi(x, y, \alpha) = 0 \text{ y } \varphi_\alpha(x, y, \alpha) = 0$$

puede cumplirse, hablando en términos generales, para curvas que no son envolvente. Por ejemplo, la ecuación

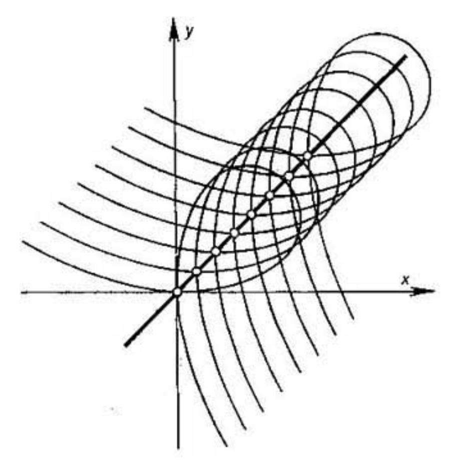


Fig. 12

de la envolvente de la familia de curvas

$$(x-\alpha)^3+(y-\alpha)^3-3(x-\alpha)(y-\alpha)=0$$

se verifica para la recta $x = y$ que, sin embargo, no es envolvente. Esta recta consta de los puntos múltiples de las curvas de la familia (fig. 12).

EJERCICIOS PARA EL CAPITULO II

1. Para la hélice

$$x=\cos t,\ y=\operatorname{sen} t,\ z=t$$

hallar en el punto (1, 0, 0) las ecuaciones

a) de la tangente,
b) del plano osculador,
c) del plano normal,
d) de la normal principal,
e) de la binormal.

Respuesta. La ecuación de la tangente es

$$\frac{x-1}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1};$$

la ecuación del plano osculador es

$$y - z = 0;$$

la ecuación del plano normal es

$$y + z = 0;$$

la ecuación de la normal principal es

$$y = z = 0;$$

la ecuación de la binormal es

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}.$$

2. Determinar la ecuación de la tangente a la curva definida por las ecuaciones

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x^2 + y^2 = x$$

en el punto (0, 0, 1).

Respuesta.

$$\frac{x}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{0}.$$

3. Hallar la ecuación de la parábola de tipo

$$y = x^2 + ax + b$$

tangente en el punto (1, 1) a la circunferencia

$$x^2 + y^2 = 2.$$

Respuesta. $y = x^2 - 3x + 3$.

4. Hallar la curva $y = y(x)$ si se conoce que es constante e igual a a la longitud del segmento de la tangente comprendido entre el punto de tangencia y el punto de intersección de la tangente con el eje x.

Respuesta. La tractriz

$$c \pm x = a \ln \frac{a - \sqrt{a^2 - y^2}}{y} + \sqrt{a^2 - y^2}.$$

5. Sobre las binormales de una hélice simple se toman segmentos de una misma longitud. Hallar la ecuación de la curva formada por los extremos de estos segmentos.

Respuesta. Una hélice.

6. ¿Bajo qué ángulos se cortan las curvas

$$xy = c_1 \text{ y } x^2 - y^2 = c_2?$$

7. Demostrar que si en el plano la curva γ se corta formando ángulo recto con las curvas de la familia

$$\varphi(x, y) = \text{const} \; (\varphi_x^2 + \varphi_y^2 \neq 0),$$

entonces esta curva satisface la ecuación

$$\frac{dx}{\varphi_x}=\frac{dy}{\varphi_y}.$$

8. Hallar la familia de curvas que cortan bajo un ángulo recto todas las circunferencias que pasan por dos puntos dados del plano.

Respuesta. Una familia de circunferencias.

9. Hallar la ecuación de la circunferencia que tiene un contacto de orden dos con la parábola $y = x^2$ en su vértice.

Respuesta. $x^2 + y^2 = y$.

10. Hallar la envolvente de la familia de rectas que forman en el ángulo de coordenadas XOY triángulos de área $2a^2$.

Respuesta. La rama correspondiente al ángulo XOY de la hipérbola equilátera $xy = a^2$.

11. Hallar la envolvente de la familia de rectas sobre las cuales los ejes de coordenadas determinan un segmento de longitud constante a.

Respuesta. La astroide

$$|x|^{\frac{2}{3}}+|y|^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}.$$

12. Hallar la envolvente de las trayectorias de un punto material lanzado desde el origen de coordenadas con velocidad v_0.

Respuesta. La parábola de seguridad

$$y=-\frac{gx^2}{2v_0^2}+\frac{v_0^2}{2g}$$

g es la aceleración de la gravedad).

13. Hallar la envolvente de los rayos luminosos que parten del origen de coordenadas y son reflejados por la circunferencia

$$x^2 + y^2 = 2ax.$$

Respuesta. El caracol de Pascal

$$(x^2+y^2-2ax)^2+\frac{4a^2}{3}\left(x^2+y^2-\frac{16ax}{9}\right)=0.$$

PROBLEMAS Y TEOREMAS PARA EL CAPITULO II

1. Sean γ una curva, P un punto de la misma y g una recta que pasa por dos distintos puntos R y S de la curva. Se dice que la curva γ tiene en el punto P una tangente en el sentido fuerte si las rectas g convergen a una recta g_P cuando R y $S \to P$.

Demostrar que toda curva suave posee en cada punto una tangente en el sentido fuerte y que ésta coincide con la tangente corres-

pondiente a la definición habitual dada en el § 2.

Si la curva posee en cada punto una tangente en el sentido fuerte, la curva es suave.

2. Demostrar que si las tangentes a una curva suave pasan por un mismo punto, entonces la curva es un segmento de recta, una semirrecta o una recta.

3. Demostrar que las tangentes a la hélice

$$x = a \cos \omega t,\ y = a \operatorname{sen} \omega t,\ z = bt$$

forman ángulo constante con el plano xy. Demostrar que las normales principales de la hélice cortan el eje z.

4. Se denomina inversión la transformación para la cual los puntos correspondientes pertenecen a una misma semirrecta que arranca de un punto fijo S (centro de la inversión) siendo constante el producto de sus distancias a S. Demostrar que la inversión conserva los ángulos entre las curvas.

5. Demostrar que la curva es plana si las tangentes a la misma son paralelas a un plano.

6. ¿Bajo qué condición las rectas g_t

$$\begin{cases} a_1(t)\,x + b_1(t)\,y + c_1(t)\,z + d_1(t) = 0, \\ a_2(t)\,x + b_2(t)\,y + c_2(t)\,z + d_2(t) = 0, \end{cases}$$

son tangentes a la curva

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)?$$

Hallar esta curva

7. Hallar en el punto (x_0, y_0, z_0) la ecuación del plano osculador a la curva definida por las ecuaciones

$$\varphi(x,\ y,\ z) = 0 \text{ y } \psi(x,\ y,\ z) = 0.$$

8. Sean γ una curva, P un punto de la misma y α un plano que pasa por los tres distintos puntos Q, R y S de la curva. Se dice que la curva γ posee en el punto P un plano osculador en el sentido fuerte si los planos α convergen a un plano α_P cuando Q, R y $S \to P$.

Demostrar que toda curva regular (dos veces continuamente diferenciable) que en el punto P posee un plano osculador único en el sentido habitual (§ 3), tiene en dicho punto un plano osculador en el sentido fuerte y ambos coinciden.

9. Hallar la curva

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$$

a partir de sus planos osculadores

$$A(t)\,x + B(t)\,y + C(t)\,z + D(t) = 0.$$

10. Demostrar que la curva es plana si todos sus planos osculadores pasan por un mismo punto.

11. Demostrar que una condición necesaria y suficiente para que la curva

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$$

sea plana consiste en que

$$\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} \equiv 0.$$

12. Demostrar que la propiedad de contacto de curvas es recíproca, o sea, si una curva suave γ_1 tiene un contacto de orden n con una curva suave γ_2, entonces la curva γ_2 tiene en el mismo punto un contacto de orden n con la curva γ_1.

Mostrar con un ejemplo que es substancial la exigencia de la suavidad.

13. Supongamos que las curvas γ_1, γ_2 y γ_3 poseen un punto común P en el que las curvas γ_1 y γ_2 y las curvas γ_2 y γ_3 tienen un contacto de orden n. Entonces las curvas γ_1 y γ_3 también tienen un contacto de orden n en el punto P.

14. Demostrar que es plana toda curva que en cada uno de sus puntos tiene un contacto de orden tres con el plano osculador.

15. Entre los puntos de los ejes de coordenadas x e y se ha establecido una correspondencia proyectiva

$$y = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta},\quad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0.$$

Demostrar que la familia de las rectas que unen los puntos correspondientes de los ejes envuelve una curva de segundo grado.

16. Demostrar que si una familia monoparamétrica de curvas en el plano viene definida por las ecuaciones

$$\varphi(x, y, \alpha, \beta) = 0 \text{ y } f(\alpha, \beta) = 0$$

siendo $f_\alpha^2 + f_\beta^2 \neq 0$, entonces la envolvente de esta familia satisface las ecuaciones

$$\varphi = 0,\ f = 0,\ \varphi_\alpha + \lambda f_\alpha = 0 \text{ y } \varphi_\beta + \lambda f_\beta = 0$$

en el sentido de que para todo punto (x, y) de la envolvente se pueden indicar unos valores α, β y λ que junto con x e y satisfacen las cuatro ecuaciones señaladas.

La ecuación de la envolvente en forma implícita puede obtenerse por eliminación de α, β y λ de estas cuatro ecuaciones.

CAPITULO III

CUESTIONES DE LA TEORIA DE CURVAS RELACIONADAS CON LOS CONCEPTOS DE CURVATURA Y DE TORSION

§ 1. Longitud de arco de una curva. Parametrización intrínseca

Sea γ una curva elemental, o sea, la imagen de un segmento abierto g obtenida por una aplicación topológica f. Respecto a la quebrada Γ (fig. 13) diremos que *está bien inscrita* en la curva γ si las preimágenes de sus vértices sobre g tienen el mismo orden que en la quebrada. La propiedad de una quebrada de estar bien inscrita en la curva no depende del homeomorfismo f. Se dice que la curva es *rectificable en un entorno del punto* P si existe un entorno elemental de este punto tal que todas las quebradas bien inscritas en él resultan uniformemente acotadas en cuanto a la longitud. Una curva rectificable en un entorno de cada uno de sus puntos se denomina simplemente *rectificable*.

Entenderemos por segmento de una curva una porción de la misma homeomorfa a un segmento rectilíneo cerrado. Denominaremos *longitud de arco de un segmento* (o simplemente longitud de arco) el extremo superior de las longitudes de todas las quebradas bien inscritas en este segmento.

Teorema. Toda curva suave γ es rectificable. Si

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$$

es una parametrización suave de la curva y $\tilde{\gamma}$ $(a \leqslant t \leqslant b)$ es un segmento de la curva γ, entonces la longitud de este segmento es

$$s(\tilde{\gamma}) = \int_a^b |\boldsymbol{r}'(t)|\, dt.$$

Demostración. Sea P un punto cualquiera de la curva y $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ una parametrización suave de la curva en un entorno de este punto. Estimemos la longitud de una quebrada Γ bien inscrita en el entorno $\alpha < t < \beta$ del punto P.

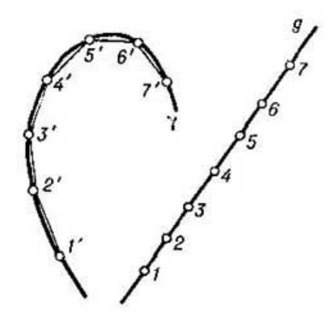


Fig. 13

Sean $t_1, t_2, \ldots, t_n$ los valores del parámetro correspondientes a los vértices sucesivos de la quebrada. La longitud del lado de la quebrada que une los vértices (t_{i-1}) y (t_i) es igual a $|\boldsymbol{r}(t_i) - \boldsymbol{r}(t_{i-1})|$. La longitud de toda la quebrada es

$$s(\Gamma) = \sum_i |\boldsymbol{r}(t_i) - \boldsymbol{r}(t_{i-1})|.$$

Tenemos

$$\boldsymbol{r}(t_i) - \boldsymbol{r}(t_{i-1}) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \boldsymbol{r}'(t)\,dt.$$

De aquí resulta

$$|\boldsymbol{r}(t_i) - \boldsymbol{r}(t_{i-1})| \leqslant \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\boldsymbol{r}'(t)|\,dt \leqslant (t_i - t_{i-1})\,M,$$

donde M es una constante que satisface la condición $|\boldsymbol{r}'(t)| \leqslant M$. Por consiguiente

$$s(\Gamma) \leqslant M \sum (t_i - t_{i-1}) = M(\beta - \alpha).$$

Es decir, las quebradas Γ, inscritas en un entorno suficientemente pequeño del punto P, están acotadas en conjunto y, por consiguiente, la curva γ es rectificable.

Determinemos la longitud de un segmento $\tilde{\gamma}$ de una curva γ definido por la ecuación

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t), \quad a \leqslant t \leqslant b.$$

Observemos, ante todo, que repitiendo literalmente el razonamiento anterior podemos probar que son uniformemente acotadas las longitudes de las quebradas inscritas en el segmento $\tilde{\gamma}$. Por consiguiente, la longitud de arco del segmento $\tilde{\gamma}$ es finita.

Inscribamos en el segmento $\tilde{\gamma}$ una quebrada Γ que satisfaga las condiciones siguientes: 1) la longitud de la quebrada Γ difiere a lo sumo en ε de la longitud de arco del segmento $\tilde{\gamma}$; 2) para todo i es $|t_{i+1} - t_i| < \delta$. Aquí ε y δ son números positivos cualesquiera. Es fácil ver que tal quebrada existe. En efecto, por definición de la longitud de arco de un segmento de curva, existe una quebrada que cumple la primera condición. Agregándole nuevos vértices no alteraremos la primera condición y, al mismo tiempo, podremos cumplir la segunda. Además, podemos aceptar que el primer vértice de la quebrada coincide con el punto (a) y el último, con el punto (b).

Tenemos

$$\sum_i |\boldsymbol{r}(t_i) - \boldsymbol{r}(t_{i-1})| = \int_a^b |\boldsymbol{r}'(t)|\,dt + \left\{ \sum_i (t_i - t_{i-1})|\boldsymbol{r}'(t_i)| - \int_a^b |\boldsymbol{r}'(t)|\,dt \right\} + \left\{ \sum_i |\boldsymbol{r}(t_i) - \boldsymbol{r}(t_{i-1})| - \sum_i (t_i - t_{i-1})|\boldsymbol{r}'(t_i)| \right\}. \qquad (*)$$

Por el modo de construir Γ, el primer miembro de esta igualdad difiere de $s(\tilde{\gamma})$ en ε a lo sumo. En cuanto al segundo miembro, es tan próximo a

$$\int_a^b |\boldsymbol{r}'(t)|\,dt$$

como se quiera. En efecto, por definición de la integral, el segundo término de este miembro es pequeño si lo es

δ. El tercer término puede ser representado en la forma

$$\sum \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \boldsymbol{r}'(t)\, dt \right| - \sum \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\boldsymbol{r}'(t_i)|\, dt$$

y, por consiguiente, su valor absoluto no pasa de

$$\sum \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\boldsymbol{r}'(t) - \boldsymbol{r}'(t_i)|\, dt = \int_a^b \varepsilon(t)\, dt,$$

donde $\varepsilon(t) \to 0$ cuando $\delta \to 0$ en virtud de que la función $\boldsymbol{r}'(t)$ es uniformemente continua. Luego, el tercer término de la igualdad (*) es pequeño si lo es δ.

Es decir, llegamos a la conclusión de que la longitud del segmento $\tilde{\gamma}$ de la curva γ difiere tan poco como se quiera de

$$\int_a^b |\boldsymbol{r}'(t)|\, dt$$

y, por consiguiente, es igual a esta integral.

Hemos demostrado completamente el teorema.

Sean γ una curva rectificable y $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ una parametrización de la misma. Sea $s(t)$ la longitud de arco del segmento t_0t de la curva γ. Definamos la función $\sigma(t)$ mediante las condiciones

$$\sigma(t) = s(t) \text{ si } t_0 < t,$$
$$\sigma(t) = -s(t) \text{ si } t_0 > t,$$
$$\sigma(t_0) = 0.$$

La función $\sigma(t)$ es estrictamente monótona. Por esto, podemos tomar σ como parámetro de la curva. Denominaremos esta parametrización *intrínseca*.

Teorema. La parametrización intrínseca de una curva regular (k veces diferenciable o analítica) sin puntos singulares es una parametrización regular (k veces diferenciable o analítica, respectivamente). Si $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\sigma)$ *es la parametrización intrínseca de una curva, entonces*

$$|\boldsymbol{r}'(\sigma)| = 1.$$

Demostración. Sea $\boldsymbol{r} = \tilde{\boldsymbol{r}}(t)$ una parametrización regular cualquiera de la curva γ en un entorno de un punto arbitrario correspondiente al valor σ_1 del parámetro. Para todo segmento perteneciente a este entorno tenemos

$$\sigma - \sigma_1 = \int_{t_1}^{t} \sqrt{\boldsymbol{r}'^2(t)}\,dt.$$

Puesto que $\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \sqrt{\tilde{\boldsymbol{r}}'^2(t)} > 0$ y $\tilde{\boldsymbol{r}}(t)$ es una función k veces diferenciable de t, resulta que t es una función k veces diferenciable de σ. Pero para σ próximos a σ_1 se tiene $\boldsymbol{r}(\sigma) = \tilde{\boldsymbol{r}}(t(\sigma))$. De aquí se deduce que $\boldsymbol{r}(\sigma)$ es una función regular (k veces diferenciable). Tenemos

$$\frac{\delta \boldsymbol{r}(\sigma)}{d\sigma} = \frac{d\tilde{\boldsymbol{r}}(t)}{dt} \cdot \frac{dt}{d\sigma} = \frac{d\tilde{\boldsymbol{r}}(t)}{dt} \cdot \frac{1}{\left| \frac{d\tilde{\boldsymbol{r}}(t)}{dt} \right|}.$$

Por consiguiente,

$$\boldsymbol{r}'(\sigma) = 1.$$

Hemos demostrado el teorema.

Para terminar, daremos las fórmulas que permiten calcular la longitud de arco de una curva regular para los distintos casos de la representación analítica de la curva.

1. Si la curva viene dada por las ecuaciones

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),$$

entonces

$$s(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} |\boldsymbol{r}'(t)|\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,dt.$$

2. Si la curva viene dada por las ecuaciones

$$y = y(x), \quad z = z(x),$$

entonces

$$s(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\,dx.$$

En el caso de curvas planas pertenecientes al plano xy, en estas fórmulas hay que poner $z' = 0$.

§ 2. Curvatura de una curva

Sea P un punto cualquiera de una curva regular γ y sea Q un punto de la curva próximo a P. Designemos por $\Delta\vartheta$ el ángulo entre las tangentes a la curva en los puntos P y Q y por $|\Delta s|$ la longitud de arco del segmento PQ de la curva (fig. 14).

Denominaremos *curvatura* de la curva γ en el punto P el límite de la razón $\Delta\vartheta\,(|\Delta s|)^{-1}$ cuando $Q \to P$.

Teorema. Toda curva regular (dos veces continuamente diferenciable) tiene en cada punto una curvatura determinada k_1. *Si*

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$$

es la parametrización intrínseca de la curva, entonces

$$k_1 = |\boldsymbol{r}''(s)|.$$

Demostración. Supongamos que los puntos P y Q corresponden a los valores s y $s + \Delta s$ del parámetro. El ángulo $\Delta\vartheta$ es igual al ángulo entre los vectores unitarios tangentes $\boldsymbol{\tau}(s) = \boldsymbol{r}'(s)$ y $\boldsymbol{\tau}(s + \Delta s) = \boldsymbol{r}'(s + \Delta s)$.

Puesto que los vectores $\boldsymbol{\tau}(s)$ y $\boldsymbol{\tau}(s + \Delta s)$ son unitarios y forman ángulo $\Delta\vartheta$, resulta que $|\boldsymbol{\tau}(s + \Delta s) - \boldsymbol{\tau}(s)| = 2 \operatorname{sen} \frac{\Delta\vartheta}{2}$ (fig. 15). Por ello

$$\frac{|\boldsymbol{\tau}(s+\Delta s)-\boldsymbol{\tau}(s)|}{|\Delta s|} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{\Delta\vartheta}{2}}{|\Delta s|} = \frac{\operatorname{sen} \frac{\Delta\vartheta}{2}}{\frac{\Delta\vartheta}{2}} \cdot \frac{\Delta\vartheta}{|\Delta s|}.$$

Observando que $\Delta\vartheta \to 0$ cuando $|\Delta s| \to 0$ debido a la continuidad de $\boldsymbol{\tau}(s)$ y pasando al límite, encontramos

$$|\boldsymbol{r}''(s)| = k_1.$$

Hemos demostrado el teorema.

Sea la curvatura distinta de cero en un punto dado de la curva. Consideremos el vector $\boldsymbol{\nu} = \frac{1}{k_1} \boldsymbol{r}''(s)$. El vector $\boldsymbol{\nu}$ es unitario y se encuentra en el plano osculador a la curva (§ 3 del capítulo II). Además, este vector es perpendicular al vector tangente $\boldsymbol{\tau}$ ya que $\boldsymbol{\tau}^2 = 1$ y, por consiguiente, $\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}' = \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\nu}k_1 = 0$. Es decir, este vector

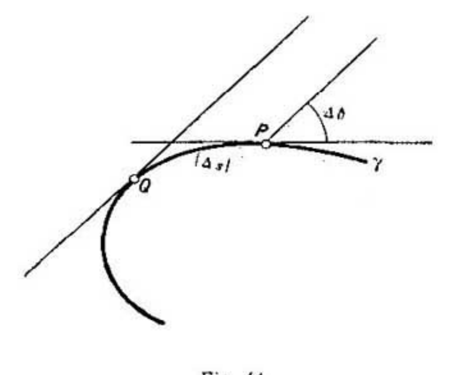


Fig. 14

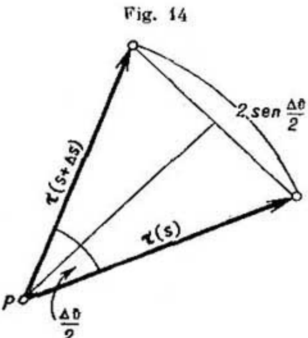


Fig. 15

tiene la dirección de la normal principal a la curva. Es evidente que la dirección del vector **ν** no cambia si se modifica el origen de referencia de los arcos s o el sentido del recorrido. Al hablar en adelante del vector unitario de la normal principal de la curva, entenderemos por éste el vector **ν**.

Es obvio que el vector $\boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\beta}$ tiene la dirección de *la binormal* a la curva. Denominaremos este vector *vector unitario de la binormal a la curva.*

Hallemos la fórmula de la curvatura de una curva para cualquier parametrización. Supongamos que la curva viene dada por la ecuación vectorial

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t).$$

Expresemos la derivada segunda de la función vectorial $\boldsymbol{r}$ respecto al arco s en términos de las derivadas respecto a t. Tenemos

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}'_s s',$$

de donde

$$\boldsymbol{r}'^2 = s'^2.$$

Por consiguiente,

$$\boldsymbol{r}'_s = \frac{\boldsymbol{r}'}{\sqrt{\boldsymbol{r}'^2}}.$$

Derivando esta igualdad una vez más respecto a t, obtenemos

$$\boldsymbol{r}''_{ss} s' = \frac{\boldsymbol{r}''}{\sqrt{\boldsymbol{r}'^2}} - \frac{(\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'')\,\boldsymbol{r}'}{(\sqrt{\boldsymbol{r}'^2})^3}.$$

Elevando esta igualdad al cuadrado y observando que $s'^2 = \boldsymbol{r}'^2$, tendremos

$$k_1^2 = \frac{\boldsymbol{r}''^2\boldsymbol{r}'^2 - (\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'')^2}{(\boldsymbol{r}'^2)^3}$$

o, que viene a ser lo mismo,

$$k_1^2 = \frac{(\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}'')^2}{(\boldsymbol{r}'^2)^3}.$$

Para la curvatura de una curva dada por las ecuaciones

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

obtenemos de aquí

$$k_1^2 = \frac{\begin{vmatrix} x'' & y'' \\ x' & y' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y'' & z'' \\ y' & z' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z'' & x'' \\ z' & x' \end{vmatrix}^2}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^3}.$$

Si la curva es plana y se encuentra en el plano xy,

$$k_1^2 = \frac{x''y' - y''x')^2}{(x'^2 + y'^2)^3}.$$

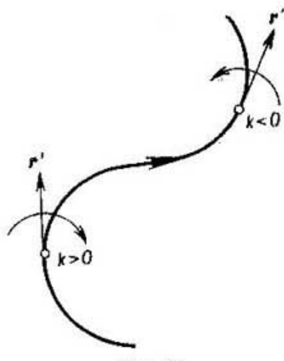


Fig. 16

Si la curva es plana y viene dada por la ecuación $y = y(x)$,

$$k_1^2 = \frac{y''^2}{(1+y'^2)^3}.$$

Nota. La curvatura de una curva es, por definición, no negativa. Para las curvas planas resulta conveniente en muchos casos asignar a la curvatura un signo considerándola en unos casos positiva y en otros, negativa. Esto se hace partiendo de que el vector $r'(t)$ tangente a la curva gira al desplazarse a lo largo de la curva en el sentido de los valores crecientes de t. *Según el sentido en que gira el vector $r'(t)$, la curvatura se considera positiva o bien negativa* (fig. 16). Si el signo de la curvatura de una curva plana se determina de este modo, para ella se obtiene la fórmula

$$k = \frac{x''y' - y''x'}{(x'^2 - y'^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{o} \quad k = -\frac{x''y' - y''x'}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

En particular, si la curva viene dada por la ecuación $y = y(x)$, se tiene

$$k = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{o} \quad k = -\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Para terminar, hallemos todas las curvas que en cada punto tienen curvatura igual a cero. Tenemos

$$k_1 = |\boldsymbol{r}''(s)| = 0.$$

De aquí $\boldsymbol{r}''(s) = 0$ y, por consiguiente, $\boldsymbol{r}(s) = \boldsymbol{a}s + \boldsymbol{b}$, donde $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son unos vectores constantes.

Es decir, *una curva cuya curvatura es siempre nula, es una recta o un segmento abierto de una recta.* La afirmación recíproca también es válida.

§ 3. Torsión de una curva

Sea P un punto cualquiera de una curva γ y sea Q un punto de la curva próximo a P. Designemos por $\Delta\vartheta$ el ángulo entre los planos osculadores a la curva en los puntos P y Q y por $|\Delta s|$, la longitud del segmento PQ de la curva. Entenderemos por torsión absoluta $|k_2|$ de la curva γ en el punto P el límite de la razón $\Delta\vartheta\,(|\Delta s|)^{-1}$ cuando $Q \to P$ (fig. 17).

Teorema. Toda curva regular (tres veces continuamente diferenciable) en cada punto en el que la curvatura es distinta de cero tiene una torsión absoluta $|k_2|$ *determinada. Si*

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$$

es la parametrización intrínseca de la curva, entonces

$$|k_2| = \frac{(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'', \boldsymbol{r}''')}{k_1^2}.$$

Demostración. Si en el punto P la curvatura de la curva γ es distinta de cero, también será, por continuidad, distinta de cero en los puntos próximos a P. En todo punto en el que la curvatura es distinta de cero, los vectores $\boldsymbol{r}'(s)$ y $\boldsymbol{r}''(s)$ son distintos de cero y no son paralelos. Por eso, en todo punto Q próximo a P existe un plano osculador determinado.

Sean $\boldsymbol{\beta}(s)$ y $\boldsymbol{\beta}(s + \Delta s)$ los vectores unitarios de la binormal en los puntos P y Q de la curva γ. El ángulo $\Delta\vartheta$ es igual al ángulo entre los vectores $\boldsymbol{\beta}(s)$ y $\boldsymbol{\beta}(s + \Delta s)$.

Puesto que los vectores $\boldsymbol{\beta}(s)$ y $\boldsymbol{\beta}(s + \Delta s)$ son unitarios y forman ángulo $\Delta\vartheta$, es $|\boldsymbol{\beta}(s + \Delta s) - \boldsymbol{\beta}(s)| = 2 \operatorname{sen} \frac{\Delta\vartheta}{2}$.

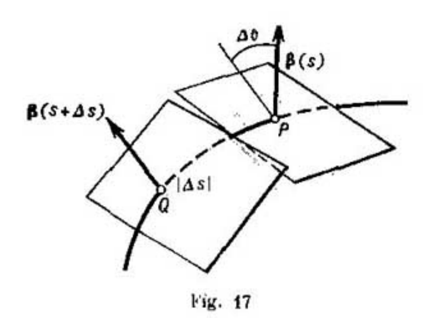


Fig. 17

Por eso

$$\frac{|\beta(s+\Delta s)-\beta(s)|}{|\Delta s|}=\frac{2\,\mathrm{sen}\,\frac{\Delta\vartheta}{2}}{|\Delta s|}=\frac{\mathrm{sen}\,\frac{\Delta\vartheta}{2}}{\frac{\Delta\vartheta}{2}}\cdot\frac{\Delta\vartheta}{|\Delta s|}.$$

Pasando al límite para $|\Delta s|\to 0$, obtenemos de aquí

$$|k_2|=|\beta'|.$$

El vector β' es perpendicular a β pues $\beta'\beta=\left(\frac{1}{k_2}\beta^2\right)'=$ $=0$. Es fácil ver que también es perpendicular a τ. En efecto,

$$\beta'=(\tau\times\nu)'=\tau'\times\nu+\tau]\times\nu'.$$

Pero $\tau'\parallel\nu$. Por esto $\beta'=\tau\times\nu'$, de donde resulta que β' es perpendicular a τ. Es decir, el vector β' es paralelo al vector ν y, por consiguiente,

$$|k_2|=|(\beta'\nu)|.$$

Tomando aquí $\nu=\frac{1}{k_1}r''$ y $\beta=\frac{r'\times r''}{k_1}$, obtenemos

$$|k_2|=\frac{|(r',r'',r''')|}{k_1^2}.$$

Hemos demostrado completamente el teorema. Definamos ahora *la torsión* de una curva.

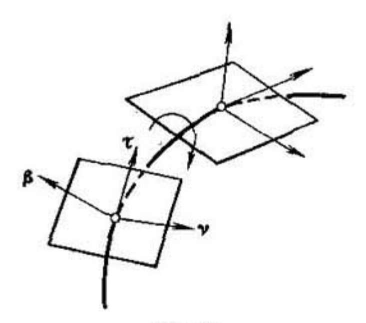


Fig. 18

Del paralelismo de los vectores β' y ν se deduce que el plano osculador gira alrededor de la tangente a la curva cuando se desplaza a lo largo de la curva en el sentido de los valores crecientes de s. En vista de ello, *definiremos la torsión de la curva mediante la igualdad*

$$k_2 = \pm \mid k_2 \mid$$

y tomaremos el signo (+) *si el plano osculador gira del vector* β *hacia el vector* ν (fig. 18) *y el signo* (—) *si gira del vector* ν *hacia el vector* β. Definiendo de este modo la torsión de la curva, tendremos $k_2 = \beta'\nu$ o

$$k_2 = -\frac{(r', r'', r''')}{k_1^2}.$$

Hallemos la fórmula para la torsión de una curva en el caso de cualquier parametrización regular $r = r(t)$. Tenemos

$$r'_s = r't', \quad r''_{ss} = r''t'^2 + r't'',$$
$$r'''_{sss} = r'''t'^3 + \{r', r''\},$$

donde $\{r', r''\}$ es una combinación lineal de los vectores r' y r''. Introduciendo en la fórmula para k_2 las expresiones halladas para r'_s, r''_{ss} y r'''_{sss} y observando que $t'^2 = \frac{1}{r'^2}$,

obtenemos

$$k_2 = -\frac{(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'', \boldsymbol{r}''')}{(\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}'')^2}.$$

Para terminar este parágrafo, hallemos todas las curvas que en cada punto tienen torsión nula. Tenemos

$$k_2 = \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\nu} = 0.$$

Como, además, $\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\tau} = 0$ y $\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\beta} = 0$, resulta que $\boldsymbol{\beta}' = 0$, o sea, $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}_0 = \text{const.}$

Los vectores $\boldsymbol{\tau}$ y $\boldsymbol{\beta}$ son perpendiculares. Por esto, $\boldsymbol{r}'\boldsymbol{\beta}_0 = 0$. De aquí resulta $(\boldsymbol{r}(s) - \boldsymbol{r}_0)\,\boldsymbol{\beta}_0 = 0$; ello significa que la curva se encuentra en el plano determinado por la ecuación vectorial $(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)\,\boldsymbol{\beta}_0 = 0$.

Es decir, *toda curva cuya torsión es nula en cada punto, es una curva plana*. También es válida la afirmación recíproca.

§ 4. Fórmulas de Frenet. Ecuaciones intrínsecas de una curva

Las tres semirrectas que arrancan de un punto de la curva y tienen las direcciones de los vectores $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$ y $\boldsymbol{\beta}$ son aristas de un ángulo triedro. Este ángulo triedro se denomina *triedro intrínseco*.

Para estudiar las propiedades de la curva en un entorno de un punto arbitrario P, en muchos casos resulta útil escoger el sistema cartesiano de coordenadas tomando como origen de coordenadas el punto P de la curva y como ejes de coordenadas, los ejes del triedro intrínseco. Más tarde obtendremos la ecuación de la curva respecto a este sistema de coordenadas.

Expresemos las derivadas de los vectores $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$ y $\boldsymbol{\beta}$ respecto al arco de la curva en términos de los propios vectores $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$ y $\boldsymbol{\beta}$. Tenemos

$$\boldsymbol{\tau}' = \boldsymbol{r}'' = k_1\boldsymbol{\nu}.$$

Para hallar $\boldsymbol{\beta}'$ recordemos que el vector $\boldsymbol{\beta}'$ es paralelo al vector $\boldsymbol{\nu}$ y que $\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\nu} = k_2$. De aquí que

$$\boldsymbol{\beta}' = k_2\boldsymbol{\nu}.$$

Finalmente,

$$\boldsymbol{\nu}' = (\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\tau})' = \boldsymbol{\beta}' \times \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\tau}' = \\ = k_2 \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\tau} + k_1 \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\nu} = -(k_1 \boldsymbol{\tau} + k_2 \boldsymbol{\beta}).$$

Las fórmulas

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}' &= \quad k_1 \boldsymbol{\nu}, \\ \boldsymbol{\nu}' &= -k_1 \boldsymbol{\tau} \quad - k_2 \boldsymbol{\beta}, \\ \boldsymbol{\beta}' &= \quad k_2 \boldsymbol{\nu} \end{aligned}$$

se denominan *fórmulas de Frenet.*

Hallemos la descomposición del radio vector $\boldsymbol{r}(s + \Delta s)$ en un entorno de un punto arbitrario P correspondiente al arco s respecto a los ejes del triedro intrínseco en este punto. Tenemos

$$\boldsymbol{r}(s + \Delta s) = \boldsymbol{r}(s) + \Delta s \boldsymbol{r}'(s) + \frac{\Delta s^2}{2} \boldsymbol{r}''(s) + \frac{\Delta s^3}{6} \boldsymbol{r}'''(s) + \ldots$$

Pero en el punto P se tiene $\boldsymbol{r} = 0$, $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{r}'' = k_1 \boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{r}''' = k_1' \boldsymbol{\nu} - k_1^2 \boldsymbol{\tau} - k_1 k_2 \boldsymbol{\beta}$, . . ., etc. Luego,

$$\boldsymbol{r}(s + \Delta s) = \left(\Delta s - \frac{k_1^2 \Delta s^3}{6} + \ldots\right) \boldsymbol{\tau} + \\ + \left(\frac{k_1 \Delta s^2}{2} + \frac{k_1' \Delta s^3}{6} + \ldots\right) \boldsymbol{\nu} + \left(-\frac{k_1 k_2 \Delta s^3}{6} + \ldots\right) \boldsymbol{\beta}.$$

Tomando como ejes x, y y z del sistema cartesiano de coordenadas la tangente, la normal principal y la binormal, obtenemos de aquí la ecuación de la curva referida a los ejes del triedro intrínseco

$$\begin{aligned} x &= \Delta s - \frac{k_1^2 \Delta s^3}{6} + \ldots, \\ y &= \frac{k_1 \Delta s^2}{2} + \frac{k_1' \Delta s^3}{6} + \ldots, \\ z &= -\frac{k_1 k_2 \Delta s^3}{6} + \ldots \end{aligned}$$

Las proyecciones de la curva sobre los planos del triedro intrínseco en un entorno de su vértice se determinan por los pares correspondientes de estas ecuaciones. El carácter de las proyecciones para $k_1 \neq 0$ y $k_2 \neq 0$ puede verse en la fig. 19.

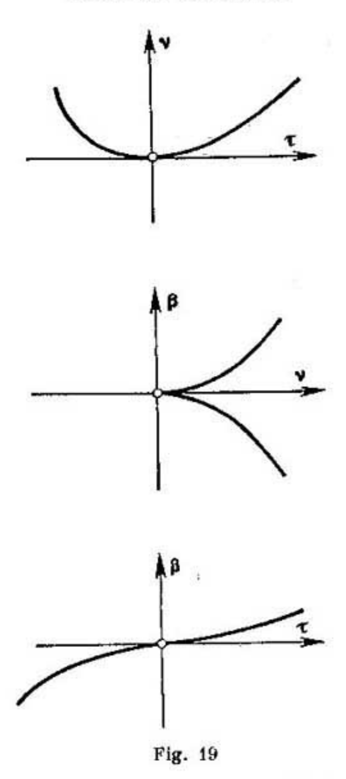


Fig. 19

Hemos visto que los coeficientes del desarrollo de la función $r(s+\Delta s)$ en serie de potencias de Δs se expresan sólo a través de la curvatura y la torsión de la curva. Esto permite suponer que la curvatura y la torsión determinan en cierta forma la curva. Efectivamente, tiene lugar el siguiente teorema.

Teorema. Sean $k_1(s)$ y $k_2(s)$ dos funciones regulares cualesquiera con la particularidad de que $k_1(s) > 0$. En,

tonces existe y es única, salvo la posición en el espacio, la curva para la cual $k_1(s)$ es la curvatura y $k_2(s)$ es la torsión en el punto correspondiente al arco s.

Demostración. Si la curva, cuya existencia afirma el teorema, realmente existe, los vectores unitarios $\boldsymbol{\tau}(s)$, $\boldsymbol{\nu}(s)$, y $\boldsymbol{\beta}(s)$ de la tangente, la normal principal y la binormal satisfacen el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\left.\begin{aligned} \xi' &= \quad k_1\eta, \\ \eta' &= -k_1\xi \qquad -k_2\zeta, \\ \zeta' &= \quad k_2\eta \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

en virtud de las fórmulas de Frenet.

Por eso, para buscar la curva que nos interesa (de curvatura $k_1(s)$ y de torsión $k_2(s)$) resulta natural analizar las soluciones del sistema (*).

Sea $\xi(s)$, $\eta(s)$ y $\zeta(s)$ la solución de este sistema que satisface las condiciones iniciales $\xi = \xi_0$, $\eta = \eta_0$ y $\zeta = \zeta_0$ para $s = s_0$, donde ξ_0, η_0 y ζ_0 son tres vectores unitarios recíprocamente perpendiculares de producto mixto $(\xi_0, \eta_0, \zeta_0) = 1$.

Demostremos que para s cualquiera los vectores $\xi(s)$, $\eta(s)$ y $\zeta(s)$ son unitarios y recíprocamente perpendiculares y que $(\xi, \eta, \zeta) = 1$. Calculemos para ello $(\xi^2)'$, $(\eta^2)'$, $(\zeta^2)'$, $(\xi\eta)'$, $(\eta\zeta)'$ y $(\zeta\xi)'$. Empleando las ecuaciones del sistema, obtenemos para estas derivadas las expresiones siguientes:

$$(\xi^2)' = 2k_1(\xi\eta),\ (\xi\eta)' = k_1(\eta^2) - k_1(\xi^2) - k_2(\xi\zeta),$$

$$(\eta^2)' = -2k_1(\xi\eta) - 2k_2(\eta\zeta),\ (\eta\zeta)' = k_2(\eta^2) - \\ - k_2(\zeta^2) - k_1(\xi\zeta),$$

$$(\zeta^2)' = 2k_2(\eta\zeta),\ (\zeta\xi)' = k_1(\eta\zeta) + k_2(\xi\eta).$$

Considerando estas igualdades como un sistema de ecuaciones diferenciales para ξ^2, η^2, ζ^2, $\xi\eta$, $\eta\zeta$ y $\zeta\xi$, vemos que lo satisfacen los valores $\xi^2 = 1$, $\eta^2 = 1$, $\zeta^2 = 1$, $\xi\eta = 0$, $\eta\zeta = 0$ y $\zeta\xi = 0$. Por otro lado, a este sistema le satisfacen los valores $\xi^2 = \xi^2(s)$, $\eta^2 = \eta^2(s)$, . . ., $(\zeta\xi) = \zeta(s)\,\xi(s)$. Ambas soluciones coinciden para $s = s_0$ y, por consiguiente, coinciden idén-

ticamente en virtud del teorema de unicidad. Es decir, para todo s

$$\xi^2(s) = 1,\ \eta^2(s) = 1,\ \ldots,\quad \zeta(s)\,\xi(s) = 0.$$

Demostremos que $(\xi(s), \eta(s), \zeta(s)) = 1$. Puesto que ξ, η y ζ son vectores unitarios recíprocamente perpendiculares, se tiene $(\xi, \eta, \zeta) = \pm 1$. El producto mixto (ξ, η, ζ) depende continuamente de s y es igual a $+1$ para $s = s_0$; por eso, es igual a $+1$ para todo s.

Consideremos ahora la curva γ definida por la ecuación vectorial

$$\boldsymbol{r} = \int\limits_{s_0}^{s} \xi(s)\,ds.$$

Observemos, ante todo, que la parametrización de la curva γ es intrínseca. En efecto, la longitud de arco del segmento $s_0 s$ de la curva γ es igual a

$$\int\limits_{s_0}^{s} |\boldsymbol{r}'(s)|\,ds = \int\limits_{s_0}^{s} |\xi(s)|\,ds = s - s_0.$$

La curvatura de la curva γ es igual a $|\boldsymbol{r}''(s)| = |\xi'(s)| = k_1(s)$. La torsión de la curva γ es igual a

$$-\frac{(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'', \boldsymbol{r}''')}{k_1^2} = -\frac{(\xi, k_1\eta, k_1'\eta + k_1\eta')}{k_1^2} =$$

$$= -\frac{(\xi, k_1\eta, k_1'\eta + k_1(-k_1\xi - k_2\zeta))}{k_1^2} = k_2(s).$$

Es decir, en el punto correspondiente al arco s la curva γ tiene la curvatura $k_1(s)$ y la torsión $k_2(s)$.

Hemos demostrado la existencia de la curva. Demostremos la unicidad.

Sean γ_1 y γ_2 dos curvas que en los puntos correspondientes al arco s tienen las mismas curvaturas $k_1(s)$ y torsiones $k_2(s)$. Hagamos que coincidan los puntos de las curvas γ_1 y γ_2 correspondientes al arco s_0 y los triedros intrínsecos en estos puntos. Sean $\boldsymbol{\tau}_1$, $\boldsymbol{\nu}_1$, $\boldsymbol{\beta}_1$ y $\boldsymbol{\tau}_2$, $\boldsymbol{\nu}_2$, $\boldsymbol{\beta}_2$ los vectores unitarios de las tangentes, las normales principales y las binormales de las curvas γ_1 y γ_2, respectivamente.

Las ternas de funciones vectoriales $\boldsymbol{\tau}_1(s)$, $\boldsymbol{\nu}_1(s)$, $\boldsymbol{\beta}_1(s)$ y $\boldsymbol{\tau}_2(s)$, $\boldsymbol{\nu}_2(s)$, $\boldsymbol{\beta}_2(s)$ son soluciones del sistema de ecuaciones para ξ, η y ζ. Los valores iniciales de estas soluciones coinciden. De aquí se deduce que las soluciones coinciden idénticamente. En particular, $\boldsymbol{\tau}_1(s) \equiv \boldsymbol{\tau}_2(s)$, o sea, $\boldsymbol{r}_1'(s) \equiv \boldsymbol{r}_2'(s)$. Integrando esta igualdad entre los límites s_0 y s, obtenemos

$$\boldsymbol{r}_1(s) \equiv \boldsymbol{r}_2(s).$$

Es decir, las curvas γ_1 y γ_2 difieren sólo por su posición en el espacio.

Hemos demostrado completamente el teorema.

El sistema de igualdades

$$k_1 = k_1(s) \quad \text{y} \quad k_2 = k_2(s)$$

se denomina *ecuaciones intrínsecas de la curva*. Según el teorema demostrado, *la curva se determina por las ecuaciones intrínsecas unívocamente a menos de un desplazamiento*.

§ 5. Curvas planas

En este parágrafo consideraremos la circunferencia osculatriz de una curva plana, la evoluta y la evolvente.

Sean γ una curva plana y P un punto sobre la misma. La circunferencia $\varkappa$ que pasa por el punto P se denomina *circunferencia osculatriz* de la curva γ en el punto P si la curva tiene en este punto un contacto de orden dos con la circunferencia. El centro de la circunferencia osculatriz se denomina *centro de curvatura* de la curva.

Hallemos la circunferencia osculatriz de la curva regular γ en un punto P donde la curvatura es distinta de cero. Sea $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ la parametrización intrínseca de la curva. La ecuación de una circunferencia cualquiera es

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a})^2 - R^2 = 0,$$

donde $\boldsymbol{a}$ es el vector del centro de la circunferencia y R es el radio.

Según el teorema del § 4 del capítulo II, para que la curva γ tenga un contacto de orden dos en el punto P con la circunferencia es necesario y suficiente que en

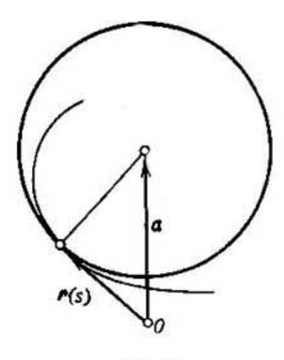


Fig. 20

este punto se cumplan las condiciones siguientes:

$$(\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{a})^2-R^2=0,$$

$$\frac{d}{ds}\{\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{a})^2-R^2\}=2(\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{a})\,\boldsymbol{r}'(s)=0,$$

$$\frac{d^2}{ds^2}\{(\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{a})^2-R^2\}=2\boldsymbol{r}'^2(s)+2(\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{a})\,\boldsymbol{r}''(s)=0.$$

De estas tres condiciones, la primera significa que el punto P pertenece a la circunferencia. La segunda condición permite ver que el vector $(\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{a})$ que va del centro de la circunferencia al punto P es perpendicular a la tangente a la curva; ello significa que el centro de la circunferencia se encuentra en la normal a la curva (fig. 20). La tercera condición determina el radio de la circunferencia. En efecto, se tiene $\boldsymbol{r}'^2(s)=1$ y $\boldsymbol{r}''(s)=$ $=k\mathbf{v}$; puesto que $|\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{a}|$ representa en el punto P el radio R de la circunferencia y puesto que el vector $(\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{a})$ es paralelo al vector $\mathbf{v}$, resulta $1-Rk=0$. Es decir, el radio de la circunferencia osculatriz es igual al radio de curvatura de la curva. De aquí se deduce que no existe circunferencia osculatriz de la curva en el punto P si la curvatura en el punto P es igual a cero. En este caso la circunferencia degenera en una recta y la tangente a la curva tiene con la curva un contacto de orden dos.

Hemos encontrado el radio y la posición del centro de la circunferencia osculatriz. Definamos ahora la evoluta de la curva.

Se denomina *evoluta* de una curva el lugar geométrico de los centros de curvatura de la curva.

Hallemos la ecuación de la evoluta de una curva regular γ. Sea $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ la parametrización intrínseca de la curva. Entonces el vector del centro de curvatura de la curva es

$$\tilde{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r} + \frac{1}{k}\boldsymbol{\nu}.$$

Veamos qué representa en sí la evoluta de una curva. Nos limitaremos a considerar los siguientes casos principales:

1. A lo largo de la curva se tiene $k'(s) > 0$ o bien $k'(s) < 0$ y $k(s)$ no se anula.

2. A lo largo de toda la curva se tiene $k'(s) > 0$ o bien $k'(s) < 0$ y $k(s)$ se anula para $s = s_0$.

3. Se tiene $k'(s) > 0$ para $s < s_0$, $k'(s) < 0$ para $s > s_0$, $k'(s_0) = 0$, $k''(s_0) \neq 0$ y $k(s)$ no se anula.

En el primer caso, la evoluta representa una curva regular sin puntos singulares (fig. 21, *a*). En efecto,

$$\tilde{\boldsymbol{r}}' = \left(\boldsymbol{r} + \frac{\boldsymbol{\nu}}{k}\right)' = \boldsymbol{\tau} + \left(-\frac{\boldsymbol{\nu}k}{k} + \boldsymbol{\nu}\left(\frac{1}{k}\right)'\right) = -\boldsymbol{\nu}\frac{k'}{k^2} \neq 0.$$

En el segundo caso, la evoluta se descompone en dos curvas regulares que representan las evolutas de las partes de la curva γ correspondientes $s < s_0$ y a $s > s_0$ (fig. 21, *b*).

En el tercer caso, la evoluta representa una curva regular. El punto de la evoluta correspondiente al punto s_0 de la curva es un punto singular; a saber, un punto de retroceso de primera especie (fig. 21, *c*). Demostremos esto.

Para $s = s_0$ se tiene

$$\tilde{\boldsymbol{r}}' = \boldsymbol{\nu}\left(\frac{1}{k}\right)' = 0,$$

$$\tilde{\boldsymbol{r}}'' = -k\boldsymbol{\tau}\left(\frac{1}{k}\right)' + \boldsymbol{\nu}\left(\frac{1}{k}\right)'',$$

$$\tilde{\boldsymbol{r}}''' = -2k\boldsymbol{\tau}\left(\frac{1}{k}\right)'' + \boldsymbol{\nu}\left(\frac{1}{k}\right)'''.$$

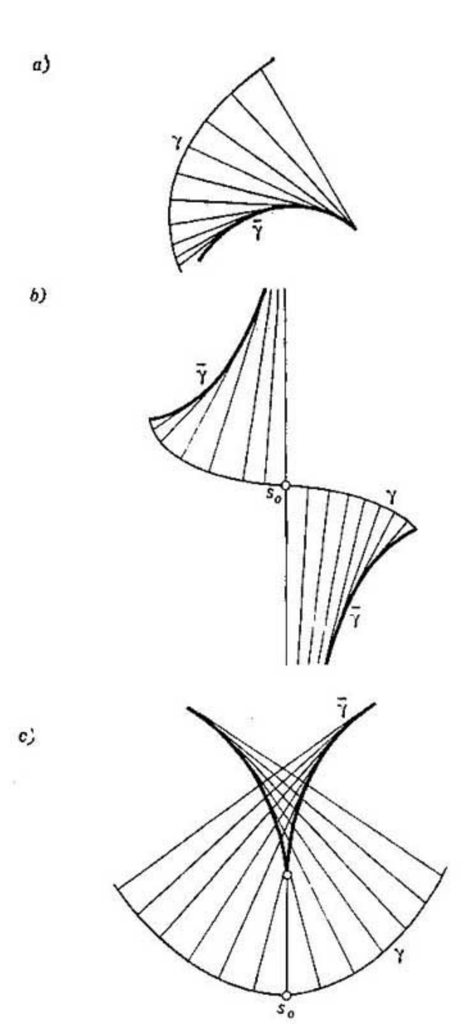


Fig. 21

Referiremos la evoluta a unas coordenadas rectangulares tomando como origen de coordenadas el punto $\tilde{Q}(s_0)$ de la evoluta y dirigendo los ejes x e y según la tangente y la normal a la curva γ en el punto $Q(s_0)$. Escogido el sistema de coordenadas de esta forma, tendremos

$$\tilde{x} = -\frac{k}{3}\left(\frac{1}{k}\right)''(s-s_0)^3 + \ldots,$$

$$\tilde{y} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}\right)''(s-s_0)^2 + \ldots$$

De aquí se deduce que el punto $\tilde{Q}(s_0)$ de la evoluta es un punto singular, concretamente, un punto de retroceso de primera especie.

Consideremos algunas propiedades de la evoluta.

Sea γ una curva regular para la cual $k'(s)$ es siempre del mismo signo y $k(s)$ nunca se anula. En este caso, como hemos visto, la evoluta $\tilde{\gamma}$ de la curva γ es una curva regular sin puntos singulares.

Hallemos la longitud de arco del segmento de la evoluta correspondiente al segmento s_1s_2 de la curva. Tenemos

$$\tilde{s}(s_1, s_2) = \int_{s_1}^{s_2} |\tilde{r}'|\,ds = \int_{s_1}^{s_2} \left|\left(\frac{1}{k}\right)'\right| ds.$$

Puesto que k' conserva el signo, de aquí obtenemos

$$\tilde{s}(s_1, s_2) = \left|\frac{1}{k(s_2)} - \frac{1}{k(s_1)}\right|.$$

Es decir, *la longitud de arco de un segmento de la evoluta es igual al valor absoluto de la diferencia entre los radios de curvatura de la curva en los puntos correspondientes a los extremos de este segmento.*

Mostremos que *la evoluta $\tilde{\gamma}$ es la envolvente de las normales a la curva γ*. En efecto, el punto $\tilde{Q}(s)$ de la evoluta se encuentra en la normal a la curva en el punto $Q(s)$. La tangente a la evoluta en el punto $\tilde{Q}(s)$ tiene la dirección $\tilde{r}' = \mathbf{v}\left(\frac{1}{k}\right)'$ y, por consiguiente, coincide con la normal a la curva en el punto $Q(s)$.

Supongamos que la curva viene dada por las ecuaciones

$$x = x(t), \quad y = y(t).$$

Hallemos su evoluta partiendo de que es la envolvente de las normales a la curva. La ecuación de la normal es

$$(\tilde{x} - x(t))\,x'(t) + (\tilde{y} - y(t))\,y'(t) = 0$$

Por consiguiente, la envolvente se determina por las ecuaciones

$$(\tilde{x} - x)\,x' + (\tilde{y} - y)\,y' = 0$$

$$(\tilde{x} - x)\,x'' + (\tilde{y} - y)\,y'' - (x'^2 + y'^2) = 0.$$

De aquí obtenemos para x e y las expresiones siguientes:

$$\tilde{x} = x - y'\,\frac{x'^2 + y'^2}{y''x' - x''y'} \quad \text{e} \quad \tilde{y} = y + x'\,\frac{x'^2 + y'^2}{y''x' - x''y'}.$$

Se denomina *evolvente* de la curva γ la curva $\tilde{\gamma}$ para la cual la curva γ es la evoluta. Sea $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ la parametrización intrínseca de la curva γ. El vector $\tilde{\boldsymbol{r}}(s)$ de un punto de la evolvente admite, obviamente, la representación

$$\tilde{\boldsymbol{r}}(s) = \boldsymbol{r}(s) + \lambda(s)\,\boldsymbol{\tau}(s).$$

Derivando esta igualdad respecto a s, obtenemos

$$\tilde{\boldsymbol{r}}' = \boldsymbol{\tau} + \lambda'\boldsymbol{\tau} + \lambda k\boldsymbol{\nu}.$$

Puesto que $\tilde{\boldsymbol{r}}'$ es perpendicular a $\boldsymbol{\tau}$, de aquí resulta que $\lambda' = -1$. Por consiguiente, $\lambda = c - s$.

Es decir, si la curva tiene una evolvente, ésta viene dada por la ecuación

$$\tilde{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}(s) + \boldsymbol{\tau}(c - s), \qquad (*)$$

donde $c = \text{const}$. Es fácil ver que toda curva definida por la ecuación (*) tiene como evoluta la curva γ y, por consiguiente, es para ella la evolvente. La ecuación de la evolvente en el caso de una parametrización arbitraria de la curva γ es, obviamente,

$$\tilde{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}(t) - \frac{\boldsymbol{r}'(t)}{\sqrt{\boldsymbol{r}'^2(t)}} \int \sqrt{\boldsymbol{r}'^2(t)}\,dt$$

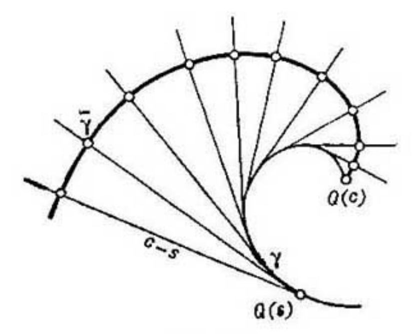


Fig. 22

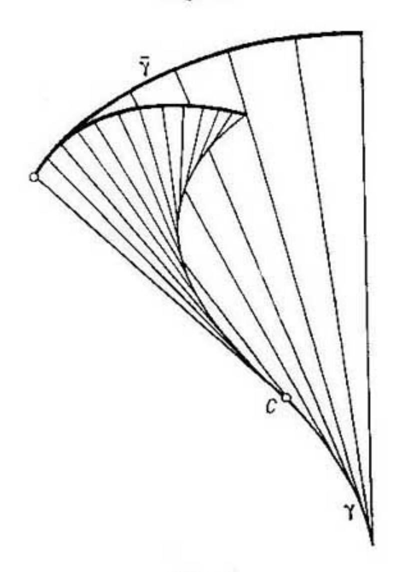


Fig. 23

o en forma escalar

$$\tilde{x} = x(t) - \frac{x'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}} \int \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt,$$

$$\tilde{y} = y(t) - \frac{y'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}} \int \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt.$$

Un procedimiento claro que permite ver cómo se forma la evolvente es el siguiente. Imaginemos un hilo inextensible arrollado sobre la parte de la curva γ correspondiente a $s < c$ con un extremo en el punto $Q(c)$. Si desarrollamos el hilo tirando de su otro extremo, este extremo describirá la evolvente de la curva (fig. 22).

Veamos que representa la evolvente en dos casos principales:

1) $k(s)$ no se anula para todos los puntos $s < c$ de la curva;

2) $k(s)$ se anula sólo para $s = s_1$ siendo $k'(s_1) \neq 0$.

En el primer caso, la evolvente es una curva regular carente de sigularidades. Efectivamente,

$$\tilde{\boldsymbol{r}} = (\boldsymbol{r} - (s-c)\boldsymbol{\tau})' = -(s-c)k\boldsymbol{\nu} \neq 0$$

En el segundo caso, la evolvente es también una curva regular pero el punto $Q(s_1)$ de la evolvente es un punto singular; a saber, un punto de retroceso de segunda especie (fig. 23). Para demostrar esta afirmación basta referir la evolvente al sistema cartesiano rectangular de coordenadas que se obtiene tomando como origen de coordenadas el punto $Q(s_1)$ y como ejes de coordenadas las rectas paralelas a la tangente y a la normal a la curva γ en el punto $Q(s_1)$.

EJERCICIOS PARA EL CAPÍTULO III

1. Hallar la longitud del segmento $-a \leqslant x \leqslant a$ de la parábola

$$y = bx^2$$

Respuesta. $s = \dfrac{2ab\sqrt{1+4a^2b^2} + \ln(2ab + \sqrt{1+4a^2b^2})}{2b}$

2. Hallar la longitud del segmento de la curva

$$x = a \operatorname{ch} t,\ y = a \operatorname{sh} t,\ z = at$$

comprendido entre los puntos 0 y t.

Respuesta. $s = a\sqrt{2}\,\mathrm{sh}\,t$.

3. Hallar la longitud de arco de la astroide

$$x = a\cos^3 t,\ y = a\,\mathrm{sen}^3\,t.$$

Respuesta. $s = 6a$.

4. Hallar la longitud del segmento $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ de la cicloide

$$x = a\,(t - \mathrm{sen}\,t),\ y = a\,(1 - \cos t).$$

Respuesta. $s = 8a$.

5. Hallar la fórmula para la longitud de arco de una curva definida en coordenadas polares por la ecuación

$$\rho = \rho\,(\vartheta).$$

Respuesta. $s\,(\vartheta_1, \vartheta_2) = \int\limits_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,d\vartheta.$

6. Hallar la curvatura de la curva

$$x = t - \mathrm{sen}\,t,\quad y = 1 - \cos t,\quad z = 4\,\mathrm{sen}\,\frac{t}{2}.$$

Respuesta. $k_1 = \frac{1}{4}\sqrt{1 + \mathrm{sen}^2\,\frac{t}{2}}$.

7. Hallar la curvatura de la curva definida por las ecuaciones en forma implícita

$$x + \mathrm{sh}\,x = \mathrm{sen}\,y + y,$$
$$z + e^z = x + \ln\,(1 + x) + 1$$

en el punto (0, 0, 0).

Respuesta. $k_1 = \frac{\sqrt{6}}{9}$.

8. Hallar la curvatura y la torsión en un punto arbitrario de la curva dada en el ejercicio 2.

Respuesta. $k_1 = \frac{1}{2a\,\mathrm{ch}^2 t}$ y $k_2 = \frac{1}{2a\,\mathrm{ch}^2 t}$.

9. Calcular la torsión de la curva

$$x = a\,\mathrm{ch}\,t\cos t,\ y = a\,\mathrm{ch}\,t\,\mathrm{sen}\,t,\ z = at.$$

Respuesta. $k_2 = -a\,\mathrm{ch}\,t$.

10. Probar que son constantes la curvatura y la torsión de una hélice simple.

11. Hallar la fórmula para la curvatura de una curva plana dada por una ecuación en coordenadas polares.

$$\textit{Respuesta.}\quad k_1 = \frac{\frac{1}{\rho} + \left(\frac{1}{\rho}\right)''}{\left(1 + \left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^{2}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

12. Mostrar que es constante la torsión de la curva

$$r = a\int b\,(t) \times b'\,(t)\,dt,$$

donde $b(t)$ es una función vectorial que satisface las condiciones $|b(t)| = 1$ y $|b^1(t)| \neq 0$ y $a =$ const.

13. Mostrar que es constante la razón entre la curvatura y la torsión de la curva

$$x = a\int \operatorname{sen} \alpha(t)\, dt, \quad y = a\int \cos \alpha(t)\, dt, \quad z = bt.$$

14. Hallar la evoluta de la parábola

$$y^2 = 2px.$$

Respuesta. La parábola semicúbica $27py^2 = 8(x-p)^3$.

15. Hallar la evoluta de la tractriz

$$x = -a\left(\ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} + \cos t\right), \qquad y = a \operatorname{sen} t.$$

Respuesta. La catenaria $y = a \operatorname{ch} \dfrac{x}{a}$.

16. Hallar la evoluta de la astroide

$$|x|^{\frac{2}{3}} + |y|^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Respuesta. La astroide $|x+y|^{\frac{2}{3}} + |x-y|^{\frac{2}{3}} = 2.$

17. Hallar las evolventes de la circunferencia

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Respuesta. $x = R(\cos\vartheta + (\vartheta - c)\operatorname{sen}\vartheta),$

$y = R(\operatorname{sen}\vartheta - (\vartheta - c)\cos\vartheta).$

18. Hallar todas las curvas planas de ecuación intrínseca dada $k = k(s)$.

Respuesta. $x = \int \operatorname{sen} \alpha(s)\, ds, \quad y = \int \cos \alpha(s)\, ds,$ donde $\alpha(s) = \int k(s)\, ds.$

PROBLEMAS Y TEOREMAS PARA EL CAPITULO III

1. Una función $f(t)$ definida en el intervalo $a < t < b$ se denomina función de variación acotada si para cualesquiera $t_1, t_2, \ldots, t_n$ tales que $a < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < b$ las sumas

$$\sum_k |f(t_k) - f(t_{k-1})|$$

resultan uniformemente acotadas.

Demostrar que la curva γ es rectificable si, y sólo si, admite en un entorno de cada uno de sus puntos una parametrización de

tipo

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),$$

donde $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ son funciones de variación acotada.

2. Supongamos que la curva posee una de las cuatro propiedades siguientes

1) las tangentes a la curva forman un ángulo constante con cierta dirección;

2) las binormales a la curva forman un ángulo constante con cierta dirección;

3) las normales principales a la curva son paralelas a cierto plano;

4) es constante el cociente entre la curvatura y la torsión de la curva. Demostrar que la curva posee entonces las tres propiedades restantes.

Hallar la forma general de la curva que tiene estas propiedades.

3. Demostrar que la curva es una hélice simple si su curvatura y torsión son constantes y diferentes de cero.

4. Dadas dos curvas, demostrar que ambas son planas si entre los puntos de las mismas existe una correspondencia biunívoca tal que coinciden las binormales a las curvas en los puntos correspondientes.

5. Demostrar que toda curva de torsión constante y de curvatura distinta de cero puede ser representada por la ecuación vectorial

$$\boldsymbol{r} = c \int \boldsymbol{b}(t) \times \boldsymbol{b}'(t)\, dt,$$

donde $\boldsymbol{b}(t)$ es una función vectorial que satisface las condiciones

$$|\boldsymbol{b}(t)| = 1 \text{ y } \boldsymbol{b}'(t) \neq 0.$$

6. Reconstruir la curva si se conoce una de las tres funciones vectoriales $\boldsymbol{\tau}(s)$, $\boldsymbol{\nu}(s)$ o $\boldsymbol{\beta}(s)$.

7. Si entre los puntos de dos curvas se puede establecer una correspondencia tal que las tangentes a estas curvas en los puntos correspondientes sean paralelas, también serán paralelas las normales principales y las binormales. Demostrar.

8. Las curvas γ_1 y γ_2 se denominan curvas de Bertrand si entre las mismas se puede establecer una correspondencia puntual biunívoca tal que coincidan las normales principales en los puntos correspondientes.

Probar las siguientes propiedades de las curvas γ_1 y γ_2:

a) la distancia entre los puntos correspondientes de las curvas γ_1 y γ_2 es constante;

b) las tangentes a las curvas γ_1 y γ_2 en los puntos correspondientes forman un ángulo constante;

c) la curvatura y la torsión de cada una de estas curvas verifican la relación

$$a \operatorname{sen} \vartheta k_1 - a \cos \vartheta k_2 = \operatorname{sen} \vartheta,$$

donde a es la distancia entre los puntos correspondientes de las curvas γ_1 y γ_2 y ϑ es el ángulo entre las tangentes en los puntos correspondientes.

9. Demostrar que la curva es una curva de Bertrand si su curvatura y torsión verifican la relación lineal

$$a \operatorname{sen} \vartheta\, k_1 - a \cos \vartheta k_2 = \operatorname{sen} \vartheta.$$

10. Demostrar que es una curva de Bertrand la curva definida por la ecuación vectorial

$$r = a \int e(t)\, dt + b \int e(t) \times e'(t)\, dt,$$

donde $e(t)$ es una función vectorial que satisface las condiciones $|e(t)| = 1$ y $|e'(t)| = 1$. Recíprocamente, toda curva de Bertrand puede ser definida por una ecuación vectorial de este tipo.

11. Supongamos que la curva γ_2 se obtiene de la curva γ_1 por efecto de una transformación proyectiva. Demostrar que siendo igual a cero la curvatura (la torsión) de la curva γ_1 en el punto P, también será igual a cero la curvatura (respectivamente la torsión) de la curva γ_2 en el punto correspondiente.

SEGUNDA PARTE

Teoría de superficies

CAPITULO IV

CONCEPTO DE SUPERFICIE

§ 1. Superficie elemental. Superficie simple. Superficie general

Una región del plano se llamará región *elemental* si es la imagen de un círculo abierto obtenida por una aplicación topológica. O sea, una región elemental es una región homeomorfa a un círculo.

Sea γ una curva cerrada simple en el plano. Es bien conocido el teorema de Jordan de que toda curva cerrada simple divide el plano en dos regiones siendo frontera de cada una de éstas. Una de las regiones es finita y la otra infinita. Resulta que la región finita es homeomorfa a un círculo. Es decir, *el conjunto interior de un cuadrado, de un rectángulo o de una elipse representan regiones elementales.*

Definamos la superficie elemental.

Un conjunto Φ de puntos del espacio se denominará *superficie elemental* si es la imagen en el espacio de una región elemental en el plano obtenida por una aplicación topológica.

Sea Φ una superficie elemental y sea G la región elemental en el plano cuya imagen por la aplicación topológica f es la superficie Φ. Sean u y v las coordenadas cartesianas de un punto arbitrario perteneciente a la región y sean x, y y z las coordenadas del punto correspondiente de la superficie. Las coordenadas x, y y z del punto de la superficie son funciones de las coordenadas del punto de la región G:

$$x = f_1(u, v), \quad y = f_2(u, v) \quad \text{y} \quad z = f_3(u, v). \qquad (*)$$

Este sistema de igualdades que define la aplicación f de la región G en el espacio se denomina *ecuaciones* de la superficie en forma paramétrica; u y v se denominan *coordenadas curvilíneas* sobre la superficie.

Para u o v fijados, las ecuaciones (*) determinan una curva que se encuentra sobre la superficie. Estas curvas se denominan *líneas coordenadas.*

Un conjunto Φ de puntos del espacio se denomina *superficie simple* si este conjunto es conexo y si todo punto X del mismo tiene un entorno G tal que la parte de Φ perteneciente a G sea una superficie elemental.

Toda superficie elemental es una superficie simple. Pero las superficies simples no se limitan ni mucho menos a las superficies elementales exclusivamente. Por ejemplo, la esfera es una superficie simple pero no elemental.

La estructura global de las superficies simples no puede describirse de un modo tan general y sencillo como en el caso de las curvas simples. La siguiente consideración permite hacerse una idea acerca de la variedad de las superficies simples. *Si de una superficie simple arbitraria se extrae cualquier conjunto cerrado de puntos de modo que no se altere el carácter conexo de la parte restante, esta parte restante será también una superficie simple.*

Una superficie simple se denomina completa si el punto límite de cualquier sucesión convergente de puntos de la superficie también es un punto de la superficie. Por ejemplo, la esfera y el paraboloide son superficies completas mientras el segmento esférico no es una superficie completa (se trata del segmento esférico sin la circunferencia que lo limita).

Si una superficie simple completa es finita, se denomina cerrada. Aparte de la esfera, es una superficie cerrada, por ejemplo, el toro, o sea, la superficie engendrada por una circunferencia que gira alrededor de una recta que pertenece al plano de la circunferencia y no la corta (fig. 24).

Definamos el concepto de un *entorno* de un punto sobre una superficie simple.

Se denomina entorno de un punto X sobre una superficie simple Φ la parte común de la superficie Φ y de un entorno espacial del punto X. Según la definición,

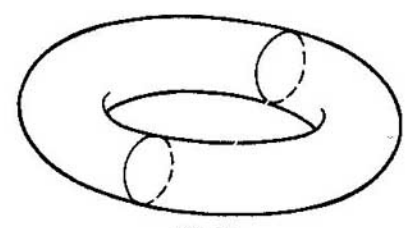


Fig. 24

todo punto de una superficie simple posee un entorno que es una superficie elemental. Al referirnos en adelante a un entorno de un punto de una superficie, entenderemos por él un entorno elemental de este tipo.

Un conjunto Φ de puntos del espacio se denominará *superficie general* si es la imagen de una superficie simple obtenida por una aplicación localmente topológica de la misma en el espacio.

Diremos que la aplicación f_1 de una superficie simple Φ_1 y la aplicación f_2 de una superficie simple Φ_2 determinan una misma superficie general Φ si entre los puntos de las superficies Φ_1 y Φ_2 puede establecerse una correspondencia topológica tal que coincidan en la superficie Φ las imágenes de los puntos correspondientes de estas superficies.

Supongamos que la superficie general Φ es la imagen de la superficie simple $\overline{\Phi}$ obtenida por la aplicación localmente topológica f. Denominaremos entorno del punto $f(X)$ sobre la superficie Φ la imagen de cualquier entorno del punto X sobre la superficie $\overline{\Phi}$ obtenida por la aplicación f. Puesto que la aplicación f es topológica en un entorno suficientemente pequeño del punto X, resulta que $f(X)$ posee sobre Φ un entorno que constituye una superficie elemental. De este modo, *el estudio «local» de cualquier superficie se reduce a la consideración de una superficie elemental.*

§ 2. Superficie regular. Representación analítica de una superficie

De la definición de superficie general se deduce que para cada punto de la misma existe un entorno que constituye una superficie elemental.

Una superficie Φ se llamará *regular* (k veces diferenciable) si para todo punto de esta superficie existe un entorno que admite una parametrización regular, o sea, puede ser representado por unas ecuaciones en forma paramétrica

$$x = f_1(u, v), \quad y = f_2(u, v), \quad z = f_3(u, v),$$

donde f_1, f_2 y f_3 son unas funciones regulares (k veces continuamente diferenciables) definidas en una región elemental G del plano uv. Siendo $k = 1$, la superficie se denomina *suave*.

Una superficie se llama *analítica* si admite una parametrización analítica (f_1, f_2 y f_3 son funciones analíticas) en un entorno suficientemente pequeño de cada uno de sus puntos.

En lo sucesivo consideraremos superficies regulares exclusivamente.

Según la definición, una superficie regular puede ser representada en un entorno de cada uno de sus puntos por las ecuaciones en forma paramétrica

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v),$$

donde $x(u, v)$, $y(u, v)$ y $z(u, v)$ son unas funciones regulares de las variables u y v definidas en una región G del plano uv. De un modo natural se plantea la cuestión: ¿cuándo el sistema de igualdades

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v),$$

donde $x(u, v)$, $y(u, v)$ y $z(u, v)$ son unas funciones regulares en una región G del plano uv, determina una superficie? En muchos casos la respuesta se obtiene del teorema siguiente.

Teorema. Si $x(u, v)$, $y(u, v)$ y $z(u, v)$ son unas funciones regulares en una región G del plano uv tales que el

rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$$

es igual a dos en todo punto de G, entonces el sistema de igualdades

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

define una superficie Φ. Esta superficie es la imagen de la superficie simple G que se obtiene por la aplicación localmente topológica que asocia al punto (u, v) de la región G el punto del espacio con las coordenadas $x(u, v)$, $y(u, v)$ y $z(u, v)$.

Es obvio que en este teorema requiere demostración sólo la afirmación de que la aplicación indicada es localmente inyectiva. Demostremos esto.

Supongamos que la afirmación es falsa; entonces existe un punto (u_0, v_0) de la región G tal que en cualquier entorno suyo, por pequeño que sea, se pueden señalar dos puntos distintos (u_1, v_1) y (u_2, v_2) tales que

$$x(u_1, v_1) - x(u_2, v_2) = 0, \quad y(u_1, v_1) - y(u_2, v_2) = 0,$$
$$z(u_1, v_1) - z(u_2, v_2) = 0.$$

Tenemos

$$\begin{aligned} x(u_1, v_1) - x(u_2, v_2) &= (x(u_1, v_1) - x(u_1, v_2)) + \\ &\quad + (x(u_1, v_2) - x(u_2, v_2)) = \\ &= (v_1 - v_2)\, x_v(u_1, \vartheta_1) + (u_1 - u_2)\, x_u(\vartheta_1', v_2) = 0. \end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned} y(u_1, v_1) - y(u_2, v_2) &= \\ &= (v_1 - v_2)\, y_v(u_1, \vartheta_2) + (u_1 - u_2)\, y_u(\vartheta_2', v_2) = 0, \\ z(u_1, v_1) - z(u_2, v_2) &= \\ &= (v_1 - v_2)\, z_v(u_1, \vartheta_3) + (u_1 - u_2)\, z_u(\vartheta_3', v_2) = 0. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $u_1 - u_2$ y $v_1 - v_2$ no se anulan simultáneamente, de las tres igualdades obtenidas deducimos que el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} x_u(\vartheta_1', v_2) & y_u(\vartheta_2', v_2) & z_u(\vartheta_3', v_2) \\ x_v(u_1, \vartheta_1) & y_v(u_1, \vartheta_2) & z_v(u_1, \vartheta_3) \end{pmatrix}$$

es menor que dos, o sea, que son iguales a cero sus determinantes de segundo orden. Debido a la continuidad de las funciones $x_u, x_v, \ldots, z_v$, de aquí se deduce que todos los determinantes de segundo orden de la matriz

$$\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$$

son iguales a cero en el punto (u_0, v_0), o sea, el rango de la matriz es menor que dos. Llegamos a una contradicción. Hemos demostrado la proposición.

Con una selección adecuada de los ejes de coordenadas x, y y z, algunas superficies admiten la parametrización de toda la superficie en forma

$$x = u, \quad y = v, \quad z = f(u, v),$$

donde $f(u, v)$ es una función definida en una región G del plano uv. Las ecuaciones de esta superficie pueden representarse en forma equivalente $z = f(x, y)$.

Este tipo de parametrización de la superficie se caracteriza por su claridad. La correspondencia entre los puntos de la superficie y los puntos de la región del plano xy se obtiene proyectando mediante rectas paralelas al eje z.

Diremos que una superficie Φ *viene definida implícitamente por la ecuación*

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

entendiendo con ello exclusivamente que las coordenadas de los puntos de la superficie satisfacen la ecuación dada, con la particularidad de que pueden existir puntos del espacio que satisfagan la ecuación dada y no pertenezcan a la superficie Φ.

En el estudio de las superficies definidas por la ecuación $\varphi(x, y, z) = 0$ desempeña un papel importante el teorema siguiente.

Teorema. Sea $\varphi(x, y, z)$ *una función regular de las variables* x, y y z. *Sea* M *el conjunto de los puntos del espacio que satisfacen la ecuación* $\varphi(x, y, z) = 0$ *y sea* (x_0, y_0, z_0) un punto de este conjunto en el que $\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2 \neq 0$. *Entonces el punto* (x_0, y_0, z_0) *posee un entorno tal que todos*

los puntos del conjunto M pertenecientes a él forman una superficie elemental regular.

Demostración. Supongamos, para concretar, que $\varphi_z \neq 0$ en el punto (x_0, y_0, z_0). Según el teorema de las funciones implícitas, existen unos números δ y ε, mayores que cero, y una función regular $\psi(x, y)$, definida en la región $|x - x_0| < \delta$ e $|y - y_0| < \delta$, tales que todos los puntos $(x, y, \psi(x, y))$, $|x - x_0| < \delta$, $|y - y_0| < < \delta$, satisfacen la ecuación $\varphi(x, y, z) = 0$ y, además, con estos puntos se agotan los puntos del paralelepípedo $|x - x_0| < \delta$, $|y - y_0| < \delta$, $|z - z_0| < \varepsilon$ que satisfacen la ecuación $\varphi(x, y, z) = 0$. La superficie elemental de la que trata el teorema viene definida por la ecuación

$$z = \psi(x, y), \; |x - x_0| < \delta, \quad |y - y_0| < \delta.$$

Hemos demostrado el teorema.

§ 3. Parametrizaciones especiales de una superficie

Toda superficie regular en un entorno de cada uno de sus puntos admite un conjunto infinito de parametrizaciones.

En efecto, sea

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

alguna parametrización de la superficie en un entorno del punto $Q(u_0, v_0)$.

Si $\varphi(\alpha, \beta)$ y $\psi(\alpha, \beta)$ son unas funciones regulares arbitrarias que satisfacen en el punto (α_0, β_0) las condiciones

$$u_0 = \varphi(\alpha_0, \beta_0), \quad v_0 = \psi(\alpha_0, \beta_0), \quad \begin{vmatrix} \varphi_\alpha & \varphi_\beta \\ \psi_\alpha & \psi_\beta \end{vmatrix} \neq 0,$$

entonces las ecuaciones

$$x = x(\varphi(\alpha, \beta), \psi(\alpha, \beta)),$$
$$y = y(\varphi(\alpha, \beta), \psi(\alpha, \beta)),$$
$$z = z(\varphi(\alpha, \beta), \psi(\alpha, \beta))$$

también ofrecen una parametrización regular de la superficie. Esto se deduce de un modo evidente de que las fórmulas

$$u = \varphi(\alpha, \beta) \text{ y } v = \psi(\alpha, \beta)$$

definen una aplicación topológica de un entorno suficientemente pequeño del punto (α_0, β_0) del plano $\alpha\beta$ en un entorno del punto (u_0, v_0) del plano uv.

Al estudiar las superficies regulares, resulta a veces útil valerse de parametrizaciones especiales. Consideremos las más usuales de éstas.

Teorema. Sean Φ *una superficie regular y*

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

una parametrización regular suya en un entorno del punto P. *Supongamos que en el punto* P *es*

$$\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \neq 0.$$

Entonces en un entorno del punto P *la superficie* Φ *puede ser representada por la ecuación*

$$z = f(x, y),$$

donde f *es una función regular.*

Demostración. Según el teorema de las funciones implícitas, existen unas funciones regulares $u(x, y)$ y $v(x, y)$ que introducidas en las ecuaciones $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$ convierten estas últimas en identidades.

Puesto que

$$\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix} = 1,$$

resulta que

$$\begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix} \neq 0.$$

Introduciendo unos parámetros nuevos α y β mediante las fórmulas

$$u = u(\alpha, \beta) \quad \text{y} \quad v = v(\alpha, \beta),$$

obtenemos

$$x = \alpha, \quad y = \beta, \quad z = z(u(\alpha, \beta), \; v(\alpha, \beta))$$

o, que es lo mismo,

$$z = f(x, y).$$

Hemos demostrado el teorema.

Teorema. Sea Φ *una superficie regular y sea* u *y* v *una parametrización regular suya. Supongamos que en un entorno de un punto* (u_0, v_0) *se dan dos ecuaciones diferenciales*

$$\left.\begin{array}{l} A_1(u, v)\,du + B_1(u, v)\,dv = 0, \\ A_2(u, v)\,du + B_2(u, v)\,dv = 0, \end{array}\right\} \qquad (*)$$

cuyos coeficientes satisfacen en el punto (u_0, v_0) *la condición*

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & A_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Entonces la superficie Φ *puede ser parametrizada en un entorno de este punto de modo que las líneas coordenadas sean las curvas integrales de las ecuaciones* (*).

Demostración. Podemos aceptar, sin perder generalidad, que $A_2 \neq 0$ y $B_1 \neq 0$. Sea $v = \varphi(\alpha, u)$ la solución de la primera de las ecuaciones (*) que para $u = u_0$ es igual a α y sea $u = \psi(\beta, v)$ la solución de la segunda ecuación que para $v = v_0$ es igual a β. Las ecuaciones $v = \varphi(\alpha, u)$ y $u = \psi(\beta, v)$ en un entorno del punto (u_0, v_0) pueden resolverse respecto a α y β, respectivamente, ya que

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} = 1 \neq 0 \quad \text{para} \quad u = u_0,$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\beta} = 1 \neq 0 \quad \text{para} \quad v = v_0.$$

Sean $\alpha = \alpha(u, v)$ y $\beta = \beta(u, v)$ estas soluciones. Mostremos que

$$\begin{vmatrix} \alpha_u & \beta_u \\ \alpha_v & \beta_v \end{vmatrix} \neq 0.$$

Puesto que $\alpha(u, v) = \text{const}$ es la integral de la primera ecuación (*), las ecuaciones

$$A_1 du + B_1 dv = 0 \text{ y } \alpha_u du + \alpha_v dv = 0$$

resultan compatibles; de aquí que

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ \alpha_u & \alpha_v \end{vmatrix} = 0.$$

Análogamente

$$\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ \beta_u & \beta_v \end{vmatrix} = 0.$$

Si suponemos que

$$\begin{vmatrix} \alpha_u & \alpha_v \\ \beta_u & \beta_v \end{vmatrix} = 0,$$

obtendremos inmediatamente que

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$$

lo cual es imposible. Luego,

$$\begin{vmatrix} \alpha_u & \alpha_v \\ \beta_u & \beta_v \end{vmatrix} \neq 0.$$

De aquí se deduce que $\alpha(u, v)$ y $\beta(u, v)$ pueden tomarse como nuevos parámetros en la superficie. Si procedemos así, las líneas coordenadas ($\alpha =$ const y $\beta =$ $=$ const) serán curvas integrales de las ecuaciones (*).

Hemos demostrado el teorema.

Nota. El sistema de ecuaciones (*) que figura en el enunciado del teorema suele darse con frecuencia mediante una sola ecuación de segundo orden

$$A\, du^2 + 2B\, du\, dv + C\, dv^2 = 0.$$

La condición respectiva que se impone a los coeficientes se reduce a la desigualdad

$$AC - B^2 < 0.$$

§ 4. Puntos singulares sobre una superficie regular

Un punto P de una superficie regular se denomina *regular* respecto al grado de regularidad k dado si en un entorno de este punto la superficie admite una parametrización k veces diferenciable

$$x = x(u, v), \quad y = (u, v), \quad z = z(u, v)$$

que satisface la condición: el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$$

es igual a dos en el punto P. En el caso contrario, el punto P se denomina *singular*. Una línea sobre la superficie se denomina *línea singular* si todos los puntos de la misma son singulares.

Para las superficies, el estudio de los puntos singulares representa un problema más complicado que en el caso de las curvas. Nos limitaremos al análisis de los casos más sencillos.

Sea

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

una parametrización regular de la superficie en un entorno de un punto Q. Supongamos que el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$$

es igual a dos en todo el entorno del punto Q salvo el propio punto Q en el cual el rango es menor que dos.

Emplearemos para la ecuación de la superficie la notación vectorial $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$, donde $\boldsymbol{r}(u, v) = x(u, v)\,\boldsymbol{e}_1 + y(u, v)\,\boldsymbol{e}_2 + z(u, v)\,\boldsymbol{e}_3$ ($\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ y $\boldsymbol{e}_3$ son los vectores unitarios dirigidos según los ejes x, y y z). Entonces la condición de que el rango de la matriz mencionada es igual a dos o es menor que dos se reduce a que $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \neq 0$ o $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v = 0$, respectivamente.

Consideremos la función vectorial

$$\xi = \frac{\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|}. \qquad (*)$$

Se comprueba directamente que ella es invariante respecto a las transformaciones de coordenadas con jacobiano mayor que cero. Si el jacobiano es menor que cero, la función cambia de signo solamente.

Un punto Q de una superficie será desde luego singular si ξ_P no tiende hacia un límite determinado cuando $P \to Q$. En efecto, si Q es un punto regular, en un entorno del mismo se puede introducir una parametrización (α, β)

regular tal que $\boldsymbol{r}_\alpha \times \boldsymbol{r}_\beta \neq 0$ en el punto Q y, por consiguiente para $P \to Q$

$$\frac{\boldsymbol{r}_\alpha \times \boldsymbol{r}_\beta}{|\boldsymbol{r}_\alpha \times \boldsymbol{r}_\beta|} = \pm \frac{\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|}$$

tiende a un límite determinado.

Adelantándonos un poco, observemos que $\xi(u, v)$ es el vector unitario de la normal a la superficie en el punto P. La normal a la superficie se define independientemente de cualquier parametrización concreta de la superficie. Si Q es un punto regular de la superficie, la normal a la superficie en un entorno de este punto depende continuamente de la posición del punto y, por consiguiente, cuando $P \to Q$ el vector unitario $\xi_P(u, v)$ tiende a un límite determinado que es el vector unitario de la normal a la superficie en el punto Q.

Ejemplo. El punto (0, 0) de la superficie

$$x = u^3, \quad y = v^3, \quad z = (u^6 + v^6)^{\frac{1}{3}}$$

(fig. 25) es un punto singular. Es fácil ver que $\xi(u, v)$ no tiende a ningún límite determinado cuando u y v tienden a cero arbitrariamente.

Supongamos ahora que ξ_P tiende hacia un límite determinado ξ_Q cuando $P \to Q$. Entonces el criterio que acabamos de exponer no da respuesta a la pregunta de si el punto Q es singular o regular.

Sean u_0 y v_0 las coordenadas curvilíneas del punto Q. Tomemos en el plano uv un contorno simple pequeño $\bar{\gamma}$ que envuelve el punto (u_0, v_0). Sea γ el contorno que le corresponde sobre la superficie. Proyectemos el contorno γ sobre el plano σ que pasa por el punto Q y que es perpendicular al vector ξ_Q.

El punto Q será desde luego un punto singular si la proyección $\tilde{\gamma}$ del contorno γ sobre el plano σ no envuelve el punto Q o lo envuelve más de una vez.

Supongamos que la afirmación es falsa y que Q es un punto regular. Entonces la superficie admite una parametrización $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\alpha, \beta)$ que satisface en Q la condición $\boldsymbol{r}_\alpha \times \boldsymbol{r}_\beta \neq 0$ de donde se deduce que $\boldsymbol{r}_\alpha$ y $\boldsymbol{r}_\beta$ son vectores no paralelos y distintos de cero.

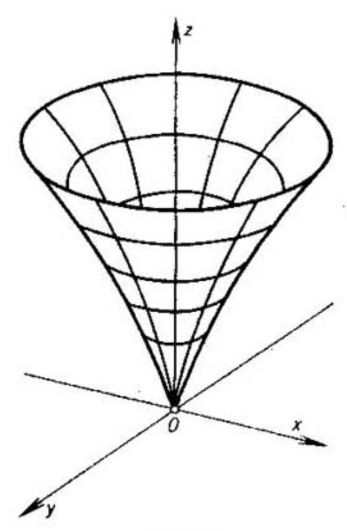


Fig. 25

Sea $\alpha = \alpha_0 + \xi(t)$ y $\beta = \beta_0 + \eta(t)$ la ecuación del contorno γ. Entonces el contorno en el plano σ dado por la ecuación

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(Q) + \xi(t)\,\boldsymbol{r}_\alpha(Q) + \eta(t)\,\boldsymbol{r}_\beta(Q)$$

difiere poco de $\tilde{\gamma}$. Pero como este contorno se obtiene de $\bar{\gamma}$ mediante una transformación afín, resulta que él, y por ende el contorno $\tilde{\gamma}$, envuelve el punto Q de la misma forma que el contorno $\bar{\gamma}$ envuelve el punto (α_0, β_0), o sea, una vez.

Ejemplo. El punto (0, 0) de la superficie

$$x = u^2 - v^2, \quad y = 2uv, \quad z = u^5$$

(fig. 26) es singular. Al recorrer la circunferencia $\bar{\gamma}$ dada por la ecuación $u^2 + v^2 = \varepsilon^2$, el punto correspondiente de $\tilde{\gamma}$ recorre dos veces la circunferencia $x^2 + y^2 = \varepsilon^4$. Es

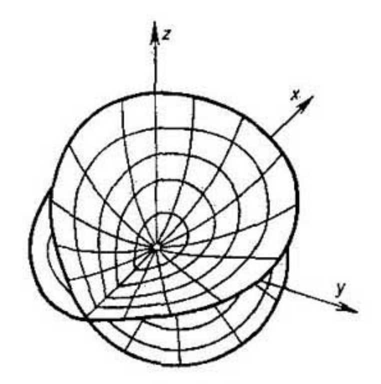


Fig. 26

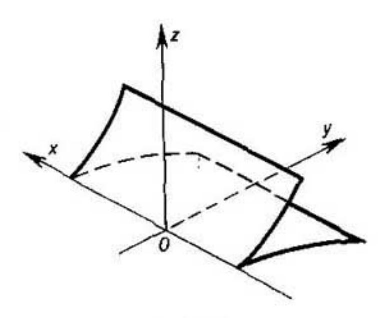


Fig. 27

decir, $\tilde{\gamma}$ envuelve dos veces el punto (0, 0).

Ejemplo. Todos los puntos de la superficie

$$x = u, \quad y = v^2, \quad z = v^3$$

situados en el eje x ($v = 0$) son singulares (fig. 27). Aquí el plano σ es el plano xy. El contorno γ de la circunferencia correspondiente $\bar{\gamma}$ dada por la ecuación $(x - a)^2 +$

$+ y^2 = s^2$ se encuentra íntegramente en el semiplano $y \geqslant 0$ (ya que $y = v^2$) y, por consiguiente, no envuelve ni una sola vez ningún punto $Q(a, 0)$ del eje x.

Una línea singular del tipo considerado en este ejemplo se denomina *arista de retroceso* de la superficie. Todo plano perpendicular a la arista de retroceso corta la superficie a lo largo de una curva para la cual el punto de la arista de retroceso es un punto singular; a saber, es un punto de retroceso. En el ejemplo considerado estas secciones representan parábolas semicúbicas.

Para concluir, diremos unas palabras sobre los puntos singulares de la superficie dada por la ecuación $\varphi(x, y, z) = 0$.

Señalemos, ante todo, que los puntos singulares de la superficie sólo pueden ser aquellos en los cuales $\varphi_x = \varphi_y = \varphi_z = 0$. En efecto, si en el punto Q de la superficie una de las derivadas parciales, digamos φ_z, es distinta de cero, la superficie admite en un entorno de Q una parametrización regular de tipo $z = \psi(x, y)$, de donde resulta que Q es un punto regular.

Supongamos que $\varphi_x = \varphi_y = \varphi_z = 0$ en el punto $Q(x_0, y_0, z_0)$ de la superficie. Desarrollando la función φ por la fórmula de Taylor en un entorno del punto Q, obtenemos

$$a_{11}(x-x_0)^2 + a_{22}(y-y_0)^2 + a_{33}(z-z_0)^2 + \\ + 2a_{12}(x-x_0)(y-y_0) + 2a_{13}(x-x_0)(z-z_0) + \\ + 2a_{23}(y-y_0)(z-z_0) + R = 0.$$

Resulta que si la forma cuadrática $\sum a_{ij}\xi_i\xi_j$ es definida, o sea, se anula sólo si todos los ξ_k son iguales a cero, entonces en un entorno suficientemente pequeño del punto (x_0, y_0, z_0) no existe otro punto del espacio, salvo el propio punto (x_0, y_0, z_0), que satisfaga la ecuación $\varphi(x, y, z) = 0$. Por esto la superficie Φ no puede representarse por la ecuación $\varphi = 0$ en un entorno del punto Q.

Nota. Frecuentemente se entiende por una superficie definida mediante la ecuación $\varphi(x, y, z) = 0$ el lugar geométrico de los puntos del espacio que satisfacen la ecuación $\varphi = 0$. Dada esta definición de superficie, en

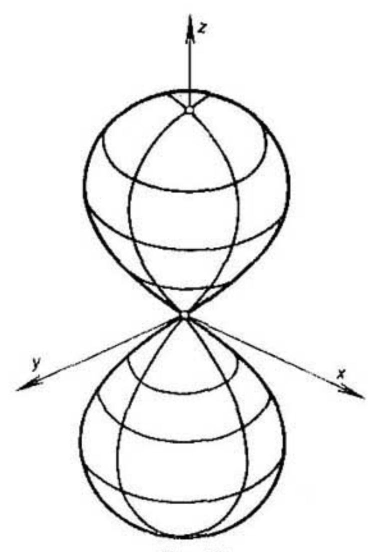


Fig. 28

el caso que acabamos de considerar el punto se denomina punto singular *aislado*.

Ejemplo. El lugar geométrico de los puntos que satisfacen la ecuación $(x^2 + y^2 + z^2)(1 - x^2 - y^2 - z^2) = 0$ consta de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y del punto $(0, 0, 0)$ que es un punto aislado de este lugar geométrico.

Si la forma cuadrática $\sum a_{ij}\xi_i\xi_j$ es indefinida pero no se descompone en el producto de dos formas lineales, el lugar geométrico de los puntos del espacio que satisfacen la ecuación $\varphi(x, y, z) = 0$ tiene, en una proximidad del punto (x_0, y_0, z_0), la forma semejante a un cono de segundo orden cuya ecuación es $\varphi(x, y, z) - R = 0$. Si la superficie se define como el lugar geométrico de los puntos del espacio que satisfacen la ecuación $\varphi(x, y, z) = 0$, el punto (x_0, y_0, z_0) se denomina punto *cónico*.

Ejemplo. El origen de coordenadas es un punto cónico del lugar geométrico formado por los puntos que satisfacen la ecuación

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2a^2 (z^2 - x^2 - y^2) = 0$$

(fig. 28).

Si la forma cuadrática $\sum a_{ij}\xi_i\xi_j$ se descompone en el producto de dos formas lineales, pueden presentarse distintos casos. El punto puede resultar singular (por ejemplo, el punto (0, 0, 0) de la superficie $xy - z^3 = 0$) o regular (por ejemplo, el punto (0, 0, 0) de la superficie $xy - xz^2 = 0$). En este caso es necesario estudiar los términos posteriores del desarrollo de la función φ.

Las consideraciones de todos los capítulos siguientes se refieren únicamente a las regiones de superficies con puntos regulares. En particular, para las parametrizaciones empleadas se da por cumplida la condición $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \neq 0$. En lo sucesivo no volveremos a mencionar esto de modo especial.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PARA EL CAPITULO IV

1. Hallar la ecuación de la superficie formada por las semirrectas que arrancan del punto (a, b, c) y cortan la parábola

$$z = 0, \ y^2 = 2px.$$

Respuesta. $(bz - cy)^2 = 2p(z - c)(az - cx)$.

2. Hallar la ecuación del cilindro circunscrito al elipsoide

$$x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$$

y con generatrices paralelas a la recta $x = y = z$.

Respuesta. $(x + 4y + 9z)^2 - 14(x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 1) = 0$.

3. Hallar el lugar geométrico formado por las proyecciones del centro del elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

sobre sus planos tangentes.

Respuesta. $x^2a^2 + y^2b^2 + z^2c^2 = (x^2 + y^2 + z^2)^2$.

4. Hallar la ecuación de la superficie que se obtiene al girar la curva

$$x = \varphi(u), \ z = \psi(u), \ y = 0$$

alrededor del eje z.

Respuesta. $x = \varphi(u) \cos v, \ y = \varphi(u) \operatorname{sen} v, \ z = \psi(u)$.

5. La recta g se desplaza en el espacio de modo que se cumplen las condiciones siguientes:

a) la recta siempre forma un ángulo recto con el eje z;

b) el punto de intersección de la recta g y del eje z se desplaza uniformemente con una velocidad a;

c) la recta gira uniformemente alrededor del eje z con una velocidad angular ω.

Hallar la ecuación de la superficie que describe en su movimiento la recta g.

Respuesta. $x = v \cos \omega u$, $y = v \operatorname{sen} \omega u$, $z = au$.

Aquí u es el tiempo y v es la distancia del punto de la superficie al eje z. Esta superficie se denomina superficie helicoidal simple o *helicoide*.

6. Tres familias de superficies vienen dadas por las ecuaciones

$$\varphi (x, y, z) = u = \text{const},$$
$$\psi (x, y, z) = v = \text{const},$$
$$\chi (x, y, z) = w = \text{const}.$$

Demostrar que si en el punto (x_0, y_0, z_0) el jacobiano

$$\frac{D(\varphi, \psi, \chi)}{D(x, y, z)} \neq 0,$$

las tres familias se pueden definir en un entorno de este punto mediante la ecuación vectorial

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r} (u, v, w).$$

Las superficies de las diferentes familias se obtienen tomando $u =$ $=$ const, $v =$ const y $w =$ const.

7. Se denomina superficie de traslación la superficie que se obtiene por un movimiento de traslación de una curva a lo largo de otra. Demostrar que toda superficie de traslación puede ser dada por la ecuación

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\varphi} (u) + \boldsymbol{\psi} (v),$$

donde $\boldsymbol{\varphi}$ y $\boldsymbol{\psi}$ son dos funciones vectoriales una de las cuales depende sólo de u y la otra, sólo de v.

8. Probar que es una superficie de traslación la superficie formada por el lugar geométrico de los puntos medios de los segmentos cuyos extremos pertenecen a dos curvas dadas.

9. Hallar la línea singular en la seudoesfera

$$x = \operatorname{sen} u \cos v, \quad y = \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \quad z = \cos u + \ln \operatorname{tg} \frac{u}{2}.$$

Respuesta. La línea singular $u = \frac{\pi}{2}$ es una arista de retroceso.

CAPITULO V

ELEMENTOS PRINCIPALES DE SUPERFICIES RELACIONADOS CON EL CONCEPTO DE CONTACTO

§ 1. Plano tangente a una superficie

Sean Φ una superficie, P un punto de la misma y α un plano que pasa por el punto P. Tomemos en la superficie un punto Q y designemos por d y h sus distancias al punto P y al plano α, respectivamente.

Diremos que el plano α es *el plano tangente* a la superficie en el punto P si el cociente $\frac{h}{d} \to 0$ cuando $Q \to P$ (fig. 29).

Teorema. Una superficie suave Φ tiene en todo punto un plano tangente que es único. Si $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ es una parametrización suave de la superficie, entonces el plano tangente en el punto $P(u, v)$ es paralelo a los vectores $\boldsymbol{r}_u(u, v)$ y $\boldsymbol{r}_v(u, v)$.

Demostración. Supongamos que la superficie Φ tiene plano tangente α en el punto $P(u, v)$. Sea $\boldsymbol{n}$ el vector unitario perpendicular al plano α. La distancia d entre el punto $Q(u + \Delta u, v + \Delta v)$ y el punto $P(u, v)$ es igual a $|\boldsymbol{r}(u + \Delta u, v + \Delta v) - \boldsymbol{r}(u, v)|$. La distancia del punto Q al plano α es igual a

$$|(\boldsymbol{r}(u + \Delta u, v + \Delta v) - \boldsymbol{r}(u, v))\,\boldsymbol{n}|$$

de modo que

$$\frac{h}{d} = \frac{|(\boldsymbol{r}(u + \Delta u, v + \Delta v) - \boldsymbol{r}(u, v))\,\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{r}(u + \Delta u, v + \Delta v) - \boldsymbol{r}(u, v)|}.$$

Por definición, $\frac{h}{d} \to 0$ cuando Δu y Δv tienden independientemente a cero. En particular,

$$\frac{|(\boldsymbol{r}(u + \Delta u, v) - \boldsymbol{r}(u, v))\,\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{r}(u + \Delta u, v) - \boldsymbol{r}(u, v)|} \to 0 \text{ cuando } \Delta u \to 0,$$

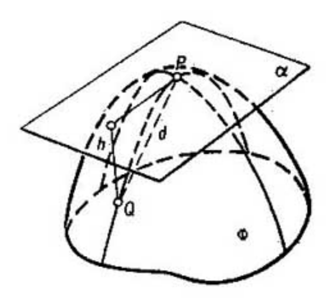


Fig. 29

Pero

$$\frac{|(\boldsymbol{r}(u+\Delta u, v)-\boldsymbol{r}(u, v))\,\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{r}(u+\Delta u, v)-\boldsymbol{r}(u, v)|}=$$

$$=\frac{\left|\dfrac{\boldsymbol{r}(u+\Delta u, v)-\boldsymbol{r}(u, v)}{\Delta u}\cdot\boldsymbol{n}\right|}{\left|\dfrac{\boldsymbol{r}(u+\Delta u, v)-\boldsymbol{r}(u, v)}{\Delta u}\right|}\rightarrow\frac{|\boldsymbol{r}_u(u, v)\,\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{r}_u(u, v)|}.$$

Es decir,

$$\boldsymbol{r}_u(u, v)\,\boldsymbol{n}=0.$$

Puesto que $\boldsymbol{r}_u(u, v)\neq 0$ (ya que $\boldsymbol{r}_u(u, v)\times\boldsymbol{r}_v(u, v)\neq$ $\neq 0$), la igualdad $\boldsymbol{r}_u(u, v)\,\boldsymbol{n}=0$ es posible sólo si el vector $\boldsymbol{r}_u(u, v)$ es paralelo al plano α.

Análogamente se demuestra que el vector $\boldsymbol{r}_v(u, v)$ es también paralelo al plano α y, como los vectores $\boldsymbol{r}_u(u, v)$ y $\boldsymbol{r}_v(u, v)$ son distintos de cero y no son paralelos ($\boldsymbol{r}_u(u, v)\times\boldsymbol{r}_v(u, v)\neq 0$), el plano tangente es único si es que existe.

Demostremos ahora la existencia del plano tangente. Supongamos que el plano α es paralelo a los vectores $\boldsymbol{r}_u(u, v)$ y $\boldsymbol{r}_v(u, v)$. Mostremos que es el plano tangente a la superficie en el punto $P(u, v)$.

Tenemos

$$\frac{h}{d}=\frac{|(r(u+\Delta u,\ v+\Delta v)-r(u,\ v))\,n|}{|r(u+\Delta u,\ v+\Delta v)-r(u,\ v)|}=$$

$$=\frac{|(r_u n)\,\Delta u+(r_v n)\,\Delta v+\varepsilon_1\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}|}{|r_u\Delta u+r_v\Delta v+\varepsilon_2\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}|}=$$

$$=\frac{\left|(r_u n)\dfrac{\Delta u}{\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}}+(r_v n)\dfrac{\Delta v}{\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}}+\varepsilon_1\right|}{\left|r_u\dfrac{\Delta u}{\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}}+r_v\dfrac{\Delta v}{\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}}+\varepsilon_2\right|},$$

donde $|\varepsilon_1|$ y $|\varepsilon_2|$ tienden a cero cuando $\Delta u,\ \Delta v\to 0$.

Supongamos que existe una sucesión de pares Δu y Δv convergentes a cero y tales que el valor que les corresponde $\frac{h}{d}>\varepsilon>0$. De la sucesión de pares Δu y Δv puede despejarse una sucesión contenida en ella para la cual resulten convergentes las razones

$$\frac{\Delta u}{\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}}\quad \text{y}\quad \frac{\Delta v}{\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}}.$$

Sean ξ y η los valores límites de estas expresiones. Es obvio que $\xi^2+\eta^2=1$. Pasando al límite de la razón $\frac{h}{d}$ según la sucesión contenida despejada de los pares Δu y Δv, obtenemos

$$\frac{h}{d}\to\frac{|(r_u n)\,\xi+(r_v n)\,\eta|}{|r_u\xi+r_v\eta|}.$$

Puesto que $(r_u n)=0$, $(r_v n)=0$ y $r_u\xi+r_v\eta\neq 0$ (r_u y r_v no son paralelos), resulta que $\frac{h}{d}\to 0$. Pero esto contradice a la hipótesis de que todos los valores de $\frac{h}{d}$ anteriores al valor límite son mayores que $\varepsilon>0$.

Hemos demostrado completamente el teorema.

Conociendo la dirección del plano tangente, es fácil obtener su ecuación.

Sea $\tilde{r}$ el vector de un punto arbitrario del plano tangente a la superficie en el punto $P\,(u,\ v)$. Entonces los vectores $\tilde{r}-r\,(u,\ v)$, $r_u\,(u,\ v)$ y $r_v\,(u,\ v)$ son paralelos al

plano tangente y, por consiguiente, el producto mixto de los mismos es igual a cero. De aquí obtenemos la ecuación del plano tangente

$$(\tilde{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{r}(u, v), \quad \boldsymbol{r}_u(u, v), \quad \boldsymbol{r}_v(u, v)) = 0$$

Supongamos que la superficie viene dada por las ecuaciones

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v).$$

De la ecuación vectorial del plano tangente se deduce que la ecuación del plano tangente correspondiente a esta forma de representación de la superficie es

$$\begin{vmatrix} \tilde{x} - x(u, v) & \tilde{y} - y(u, v) & \tilde{z} - z(u, v) \\ x_u(u, v) & y_u(u, v) & z_u(u, v) \\ x_v(u, v) & y_v(u, v) & z_v(u, v) \end{vmatrix} = 0.$$

La ecuación del plano tangente a la superficie representada por la ecuación $z = z(x, y)$ se obtiene de la ecuación que acabamos de encontrar. Basta observar que la representación de la superficie mediante la ecuación $z = z(x, y)$ es simplemente la denotación abreviada de la representación paramétrica

$$x = u, \quad y = v, \quad z = z(u, v).$$

Por eso la ecuación del plano tangente a la superficie representada por la ecuación $z = z(x, y)$ será

$$\begin{vmatrix} \tilde{x} - x & \tilde{y} - y & \tilde{z} - z \\ 1 & 0 & z_x(x, y) \\ 0 & 1 & z_y(x, y) \end{vmatrix} = 0,$$

o bien,

$$\tilde{z} - z - p(\tilde{x} - x) - q(\tilde{y} - y) = 0,$$

donde por p y q se han designado las primeras derivadas de la función $z(x, y)$.

Determinemos, por último, la ecuación del plano tangente para el caso en el que la superficie viene dada por la ecuación $\varphi(x, y, z) = 0$. Sea (x, y, z) un punto de la superficie en el que $\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2 \neq 0$ y sea $x =$

$= x(u, v)$, $y = y(u, v)$ y $z = z(u, v)$ una parametrización suave de la superficie en un entorno de este punto. Si en la ecuación de la superficie introducimos $x(u, v)$, $y(u, v)$ y $z(u, v)$ en lugar de x, y y z, obtendremos una identidad respecto a u y v. Derivando esta identidad, obtendremos en el punto (x, y, z)

$$\varphi_x x_u + \varphi_y y_u + \varphi_z z_u = 0,$$
$$\varphi_x x_v + \varphi_y y_v + \varphi_z z_v = 0.$$

Considerando estas igualdades como un sistema de ecuaciones para φ_x, φ_y y φ_z y resolviéndolo, encontramos

$$\frac{\varphi_x}{\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}} = \frac{\varphi_y}{\begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}} = \frac{\varphi_z}{\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}}.$$

En el caso de la representación paramétrica de la superficie, la ecuación del plano tangente es

$$(\tilde{x} - x)\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix} + (\tilde{y} - y)\begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix} + (\tilde{z} - z)\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} = 0.$$

Teniendo en cuenta la proporción anterior, obtenemos la ecuación del plano tangente a la superficie $\varphi(x, y, z) = 0$ en el punto (x, y, z)

$$(\tilde{x} - x)\,\varphi_x + (\tilde{y} - y)\,\varphi_y + (\tilde{z} - z)\,\varphi_z = 0.$$

Se denomina *normal* a la superficie en el punto P la recta que pasa por el punto P y es perpendicular al plano tangente en este punto.

No ofrece dificultad obtener la ecuación de la normal una vez encontrada la ecuación del plano tangente para los distintos casos de representación de la superficie; proponemos esto como un ejercicio.

§ 2. Lema sobre la distancia de un punto a una superficie. Contacto entre una curva y una superficie

Sean Φ una superficie y Q un punto arbitrario del espacio. Se denomina distancia del punto Q a la superficie Φ el extremo inferior de las distancias entre los puntos de la superficie y el punto Q.

Lema. Sea Φ *una superficie suave definida por la ecuación* $\varphi(x, y, z) = 0$. *Supongamos que en el punto* $O(x_0, y_0, z_0)$ *de la superficie se tiene* $\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2 \neq \neq 0$. *Si* $Q(x, y, z)$ *es un punto del espacio próximo al punto* O *pero no perteneciente a la superficie, entonces al introducir las coordenadas del punto* Q *en la ecuación de la superficie* Φ *se obtiene una magnitud* λ *que tiene el orden de la magnitud* h, *o sea, de la distancia del punto* Q *a la superficie, en el sentido de que la razón* $\frac{\lambda}{h}$ *tiende a un límite determinado distinto de cero cuando el punto* Q *se aproxima tanto como se quiera al punto* O *pero sin tocar la superficie.*

Demostración. Puesto que el punto O pertenece a la superficie Φ, existe un $\varepsilon > 0$ tal que todos los puntos del espacio que distan del punto O a lo sumo en ε y que satisfacen la ecuación $\varphi(x, y, z) = 0$ pertenecen a la superficie Φ.

Supongamos que el punto Q se encuentra a una distancia del punto O menor que $\frac{\varepsilon}{2}$. Sea P_n una sucesión de puntos de la superficie cuyas distancias a Q tienden a la distancia entre este punto y la superficie Φ. Los puntos P_n forman una sucesión acotada $\left(\text{sus distancias a } Q \text{ son menores que } \frac{\varepsilon}{2}\right)$; por eso, de la sucesión de puntos P_n se puede despejar una sucesión convergente contenida en ella. Sin perder generalidad, podemos aceptar que la propia sucesión P_n converge a un punto P. Debido a la continuidad de la función φ en el entorno del punto O, el punto P satisface la ecuación $\varphi(x, y, z) = 0$. De aquí resulta que el punto P pertenece a la superficie Φ. De este modo, si el punto Q es suficientemente próximo al punto O, el extremo inferior de las distancias entre los puntos de la superficie y el punto Q se alcanza en un punto P perteneciente a la superficie.

Demostremos ahora que el segmento PQ tiene la dirección de la normal a la superficie en el punto P. Sea $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ una parametrización suave de la superficie en el punto P y sea a el vector del punto Q. Como la función $(\boldsymbol{r}(u, v) - a)^2$ alcanza su mínimo en el punto P,

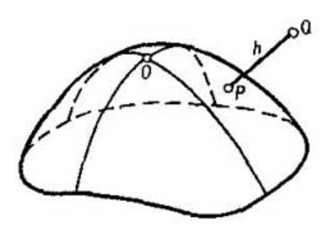


Fig. 30

debe ser

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a})\, \boldsymbol{r}_u = 0 \text{ y } (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a})\, \boldsymbol{r}_v = 0;$$

pero ello significa que el segmento PQ tiene la dirección de la normal a la superficie en el punto P.

Sean $\bar{x}$, $\bar{y}$, y $\bar{z}$ las coordenadas del punto P; ξ, η y ζ los cosenos directores de la normal a la superficie en el punto P; x, y y z las coordenadas del punto Q y h la distancia entre los puntos P y Q (fig. 30).

Tenemos

$$\bar{x} = x + \xi h, \quad \bar{y} = y + \eta h \quad \text{y} \quad \bar{z} = z + \zeta h.$$

Puesto que el punto P pertenece a la superficie, es

$$\varphi\,(x + \xi h, \quad y + \eta h, \quad z + \zeta h) = 0.$$

De aquí

$$\varphi\,(x, y, z) + h\,(\varphi_x \xi + \varphi_y \eta + \varphi_z \zeta) + h\varepsilon = 0,$$

donde $\varepsilon \to 0$ cuando $Q \to 0$.

Dividiendo esta igualdad por h y pasando al límite para $Q \to O$, obtenemos

$$\frac{\varphi\,(x, y, z)}{h} \to -(\varphi_x \xi + \varphi_y \eta + \varphi_z \zeta)_{(O)}.$$

La expresión que figura en el segundo miembro es distinta de cero ya que representa el producto escalar de los vectores (ξ, η, ζ) y $(\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z)$ que son paralelos y distintos de cero.

Hemos demostrado completamente el lema.

Apliquemos el lema demostrado al problema sobre el contacto entre una curva y una superficie.

Sean Φ y γ una superficie elemental y una curva elemental que tienen un punto común O. Sea h la distancia entre un punto arbitrario Q de la curva y la superficie. Diremos que la curva γ tiene *un contacto de orden n* con la superficie Φ si $\frac{h}{d^n} \to 0$ cuando $Q \to P$. Comprenderemos el contacto entre una curva general y una superficie general como el contacto entre los entornos elementales del punto común.

Teorema. Sean Φ y γ una superficie regular elemental y una curva regular que tienen un punto común O. Sea $\varphi(x, y, z) = 0$ la ecuación de la superficie en un entorno del punto O, con la particularidad de que $\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2 \neq 0$ en este punto *y sea $x = x(t)$, $y = y(t)$* y *$z = z(t)$ una parametrización regular de la curva γ en un entorno del punto O, con la particularidad de que $x'^2 + y'^2 + z'^2 \neq 0$ en el punto O. Para que la curva γ tenga un contacto de orden n con la superficie Φ en el punto O es necesario y suficiente que para el valor de t correspondiente al punto O se cumplan las condiciones*

$$\varphi(x(t), y(t), z(t)) = 0,$$
$$\frac{d}{dt}\varphi = 0, \quad \ldots \quad \frac{d^n}{dt^n}\varphi = 0.$$

Demostración. Supongamos que al punto O le corresponde el valor $t = t_0$. Si $Q \to O$, se tiene $t \to t_0$.

Según el lema, $\varphi(x(t), y(t), z(t))$ es del orden de la distancia entre el punto Q y la superficie Φ. En cuanto a la distancia entre los puntos Q y O, ésta es de orden $|t - t_0|$ ya que

$$\left|\frac{r(t) - r(t_0)}{t - t_0}\right| \to |r'(t_0)| \neq 0.$$

Por eso, para que en el punto O haya un contacto de orden n entre la curva γ y la superficie Φ, es necesario y suficiente que para $t \to t_0$

$$\frac{\varphi(x(t), y(t), z(t))}{(t - t_0)^n} \to 0.$$

Pero esto es posible si, y sólo si, para $t = t_0$ se anulan la función $\varphi(x(t), y(t), z(t))$ y sus derivadas hasta la de orden n.

Hemos demostrado el teorema.

Ejemplo. Hallemos *la esfera osculatriz* de una curva, o sea, la esfera con la cual la curva tiene un contacto de orden tres.

Sea $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ la parametrización intrínseca de la curva. La ecuación de la esfera es

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a})^2 = R^2,$$

donde $\boldsymbol{a}$ es el vector del centro de la esfera y R es el radio. Introduciendo $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ en esta ecuación y derivando, obtenemos sucesivamente:

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a})\,\boldsymbol{\tau} = 0,$$

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a})\,k_1\boldsymbol{\nu} + 1 = 0,$$

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a})\,(k_1'\boldsymbol{\nu} - k_1^2\boldsymbol{\tau} - k_1k_2\boldsymbol{\beta} = 0,$$

de donde

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a})\,k_1k_2\boldsymbol{\beta} + \frac{k_1'}{k_1} = 0.$$

Es decir,

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a})\,\boldsymbol{\tau} = 0,$$

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a})\,\boldsymbol{\nu} = -\frac{1}{k_1} \quad \text{y} \quad (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a})\,\boldsymbol{\beta} = -\frac{k_1'}{k_1^2k_2}.$$

De aquí

$$R = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}| = \sqrt{\left(\frac{1}{k_1}\right)^2 + \left(\frac{k_1'}{k_1^2k_2}\right)^2},$$

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r} + (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{r} + \frac{\boldsymbol{\nu}}{k_1} + \frac{\boldsymbol{\beta}k_1'}{k_1^2k_2}.$$

§ 3. Paraboloide osculador. Clasificación de los puntos de las superficies

Sean Φ una superficie regular (dos veces continuamente diferenciable) y P un punto de la misma. Sea U un paraboloide de vértice P tangente a la superficie en este punto. Designemos por h y d las distancias de un punto arbitrario Q de la superficie al paraboloide y al punto P, respectivamente (fig. 31).

El paraboloide U se denomina *paraboloide osculador* a la superficie en el punto P si la razón $\frac{h}{d^2} \to 0$ cuando

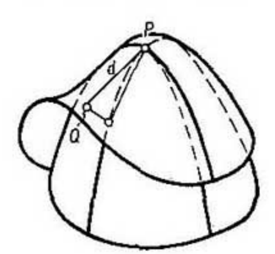


Fig. 31

$Q \to P$. No queda excluido que el paraboloide degenere en un cilindro parabólico o en un plano.

Teorema. En todo punto P de una superficie Φ regular (dos veces continuamente diferenciable) existe y es único el paraboloide osculador que, en particular, puede degenerar en un cilindro parabólico o en un plano.

Demostración. Introduzcamos en el espacio unas coordenadas cartesianas rectangulares x, y y z tomando por el origen de coordenadas el punto P, por el plano xy el plano tangente en el punto P y por el eje z la normal a este plano, o sea, la normal a la superficie.

Escogido de esta forma el sistema de coordenadas, la superficie puede ser representada en un entorno del punto P mediante la ecuación

$$z = z(x, y),$$

donde $z(x, y)$ es una función dos veces diferenciable en un entorno del punto $(0, 0)$. Demostremos esto.

Sea $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ una parametrización dos veces diferenciable de la superficie. Puesto que el vector $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \neq$ $\neq 0$ y tiene la dirección del eje z, resulta que

$$\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \neq 0.$$

De aquí se deduce, como quedó probado en el § 3 del capítulo IV, que la superficie puede ser representada en un entorno de P mediante la ecuación

$$z = z(x, y),$$

donde $z(x, y)$ es una función dos veces diferenciable. Observemos que $z(0, 0) = 0$, pues el punto P pertenece a la superficie y que $z_x(0, 0)$ y $z_y(0, 0)$ son iguales a cero ya que el plano tangente a Φ en P, o sea, el plano $z = z_x(0, 0)x + z_y(0, 0)y$, debe coincidir con el plano $z = 0$.

La ecuación del paraboloide U, incluyendo los casos de su degeneración en un cilindro parabólico o en un plano, puede ser representada mediante la ecuación de tipo

$$z - \frac{1}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2) = 0.$$

Supongamos que existe el paraboloide osculador en el punto P. Mostremos que es único. Sea

$$z - \frac{1}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2) = 0$$

la ecuación del paraboloide osuclador. Según el lema del parágrafo anterior, al introducir las coordenadas del punto Q en la ecuación del paraboloide, se obtiene una magnitud λ que tiene el orden de la distancia del punto Q al paraboloide. Por esto $\frac{\lambda}{d^2} \to 0$ cuando $Q \to P$.

Desarrollando en un entorno del origen de coordenadas la función $z(x, y)$ según la fórmula de Taylor, obtenemos

$$z(x, y) = \frac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2) + (x^2 + y^2)\varepsilon_1(x, y),$$

donde con r, s y t se han designado las derivadas segundas de z y $\varepsilon_1(x, y) \to 0$ cuando $x, y \to 0$. Introduciendo las coordenadas x, y y $z(x, y)$ del punto Q de la superficie en la ecuación del paraboloide, obtenemos

$$\lambda = \frac{1}{2}\{(r-a)x^2 + 2(s-b)xy + (t-c)y^2\} + \\ + (x^2 + y^2)\varepsilon_1(x, y).$$

El cuadrado de la distancia del punto Q al punto P es $d^2 = x^2 + y^2 + z^2(x, y) = x^2 + y^2 + (x^2 + y^2) \times \varepsilon_2(x, y)$, donde $\varepsilon_2 \to 0$ cuando $Q \to P$.

Puesto que la razón $\frac{\lambda}{d^2}$ tiende a cero cuando x e y tienden independientemente a cero, ello tendrá lugar

también si, por ejemplo, $y = 0$ y $x \to 0$. Pero en este caso

$$\frac{\lambda}{d^2} = \frac{\frac{1}{2}(r-a)x^2 + x^2\varepsilon_1}{x^2 + x^2\varepsilon_2}$$

y, por consiguiente, $\frac{\lambda}{d^2} \to 0$ cuando $x \to 0$ si, y sólo si, $a = r$. Análogamente se demuestra que $c = t$. Demostremos, por último, que $b = s$. Supongamos con este fin que x e y tienden a cero pero de modo que siempre $x = y$. Entonces

$$\frac{\lambda}{d^2} = \frac{(s-b)x^2 + 2x^2\varepsilon_1}{2x^2 + 2x^2\varepsilon_2}.$$

De aquí se ve que la condición $\frac{\lambda}{d^2} \to 0$ cuando $x \to 0$ implica la igualdad $b = s$.

Es decir, si existe el paraboloide osculador en el punto P, es único. Su ecuación respecto al sistema de coordenadas que hemos escogido será

$$z - \frac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2) = 0. \qquad (*)$$

Demostremos ahora que el paraboloide (*) siempre es osculador. En efecto, para este paraboloide se tiene

$$\frac{\lambda}{d^2} = \frac{(x^2 + y^2)\varepsilon_1}{x^2 + y^2 + (x^2 + y^2)\varepsilon_2} \to 0$$

cuando x e $y \to 0$.

Hemos demostrado completamente el teorema.

La existencia y unicidad del paraboloide osculador permite dar la siguiente clasificación de los puntos de la superficie:

1. Un punto de una superficie se denomina *elíptico* si el paraboloide osculador en este punto es un paraboloide elíptico (fig. 32, a).

2. Un punto de una superficie se denomina *hiperbólico* si el paraboloide osculador en este punto es un paraboloide hiperbólico (fig. 32, b).

3. Un punto de una superficie se denomina *parabólico* si el paraboloide osculador en este punto degenera en un cilindro parabólico (fig. 32, c).

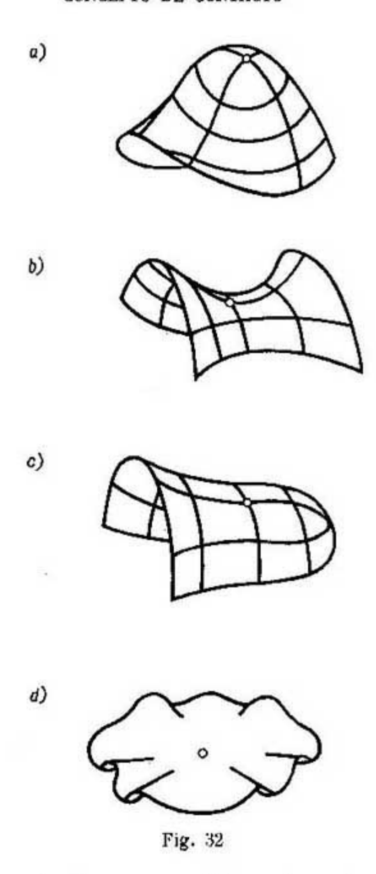


Fig. 32

4. Un punto de una superficie se denomina *punto plano* si el paraboloide osculador en este punto degenera en un plano (el plano tangente a la superficie) (fig. 32, *d*).

Para terminar, señalemos que *del mismo modo que el plano tangente reproduce en una primera aproximación*

la forma de la superficie, en un entorno del punto de tangencia, el paraboloide osculador la reproduce en una segunda aproximación.

§ 4. Envolvente de una familia de superficies dependientes de uno o dos parámetros

Sea $S\ \{F_\alpha\}$ una familia monoparamétrica de superficies suaves dependientes de un parámetro α. Una superficie suave F se denomina *envolvente* de la familia S si en cada uno de sus puntos es tangente al menos a una superficie de la familia y si cualquier porción de la misma es tangente a un conjunto infinito de superficies de la familia.

Teorema. Sea dada una familia monoparamétrica $S\ \{F_\alpha\}$ de superficies suaves

$$\varphi (x, y, z, \alpha) = 0, \quad a \leqslant \alpha \leqslant b,$$

donde φ es una función continuamente diferenciable respecto a todos sus argumentos y tal que satisface la condición $\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2 \neq 0$. Entonces, si la superficie suave F es la envolvente de esta familia, se determina por las ecuaciones

$$\varphi (x, y, z, \alpha) = 0 \quad \text{y} \quad \varphi_\alpha (x, y, z, \alpha) = 0$$

en el sentido de que para todo punto (x, y, z) de la superficie F puede señalarse un valor α tal que los cuatro valores x, y, z y α satisfarán ambas ecuaciones $\varphi = 0$ y $\varphi_\alpha = 0$.

La demostración de este teorema representa en esencia una repetición de la demostración del teorema correspondiente para las curvas (§ 5 del capítulo II); por eso, la expondremos sin entrar en detalles.

Sea $P (x, y, z)$ un punto arbitrario de la superficie F. Distinguiremos dos casos:

1. Hay un conjunto infinito de superficies F_{α_1}, F_{α_2}, . . . de la familia tangentes en el punto P.
2. Hay un número finito de superficies F_{α_1}, ..., F_{α_n} de la familia tangentes en el punto P.

Consideremos el primer caso. Sin perder generalidad, podemos aceptar que la sucesión de números α_k converge a un número α_0. Puesto que $\varphi (x, y, z, \alpha_k) = 0$ para

todo k, se tiene

$$\varphi(x, y, z, \alpha_k) - \varphi(x, y, z, \alpha_l) = \\ = (\alpha_k - \alpha_l)\,\varphi_\alpha(x, y, z, \alpha^*) = 0,$$

de donde $\varphi(x, y, z, \alpha^*) = 0$. Pasando al límite cuando k y $l \to \infty$, obtenemos

$$\varphi(x, y, z, \alpha_0) = 0 \text{ y } \varphi_\alpha(x, y, z, \alpha_0) = 0.$$

y el teorema queda demostrado en el primer caso.

Consideremos el segundo caso. Supongamos que la afirmación del teorema es falsa y que, por consiguiente, para todo k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ es $\varphi_\alpha(x, y, z, \alpha_k) \neq 0$. Designemos por ω_k^ε un ε-entorno cerrado del punto α_k y por f una porción pequeña de la superficie F que contiene el punto P. (Entendemos por una porción de la superficie una región cerrada de la superficie, o sea, la región más su frontera). Si la porción f es suficientemente pequeña y F_α es tangente a f, entonces α pertenece a uno de los entornos ω_k^ε.

Designemos por m_k el conjunto de puntos de f en los que son tangentes las superficies F_α con el parámetro α perteneciente a ω_k^ε. Todo conjunto m_k es cerrado. Existe una porción $\bar{f}$ de la superficie contenida en f que respecto a cada uno de los conjuntos m_k posee la propiedad siguiente: o bien el conjunto m_k contiene $\bar{f}$ o bien no contiene ningún punto de la misma. La porción $\bar{f}$ se construye del mismo modo que el segmento δ en la demostración del teorema correspondiente a las curvas.

Supongamos que $\bar{f}$ pertenece a m_k. Puesto que $\varphi_\alpha(x, y, z, \alpha_k) \neq 0$, las superficies F_α para las cuales $\alpha \subset \omega_k^\varepsilon$ con ε suficientemente pequeño pueden ser representadas en un entorno del punto P mediante la ecuación

$$\psi(x, y, z) = \alpha,$$

donde ψ es una función continuamente diferenciable que satisface la condición $\psi_x^2 + \psi_y^2 + \psi_z^2 \neq 0$. En la porción $\bar{f}$ la superficie F puede definirse mediante las ecuaciones $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, donde

$x(u, v)$, $y(u, v)$ y $z(u, v)$ son funciones continuamente diferenciables que satisfacen la condición $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \neq 0$.

Designemos por $\alpha(u, v)$ el valor del parámetro $\alpha \subset \subset \omega_h^\varepsilon$ que corresponde a la superficie F_α tangente a la porción $\bar{f}$ en el punto (u, v):

$$\alpha(u, v) = \psi(x(u, v), y(u, v), z(u, v));$$

es evidente que $\alpha(u, v)$ es una función continuamente diferenciable.

Tenemos

$$\alpha_u = \psi_x x_u + \psi_y y_u + \psi_z z_u,$$
$$\alpha_v = \psi_x x_v + \psi_y y_v + \psi_z z_v.$$

Pero los vectores (x_u, y_u, z_u) y (x_v, y_v, z_v) son vectores tangentes a la superficie F, el vector (ψ_x, ψ_y, ψ_z) es normal a la superficie F_α y las superficies F y F_α son tangentes, de aquí que $\alpha_u = 0$ y $\alpha_v = 0$. Por consiguiente, $\alpha = \text{const}$.

Es decir, para $\alpha \subset \omega_h^\varepsilon$ sólo una superficie de la familia es tangente a la porción $\bar{f}$ y, por consiguiente, en toda la familia hay a lo sumo n superficies de este tipo. Pero, según la definición de la envolvente, debe haber un conjunto infinito. Llegamos a una contradicción. Hemos demostrado el teorema.

Sea $S\{F_{\alpha\beta}\}$ una familia biparamétrica de superficies suaves. Una superficie suave F se denomina *envolvente* de la familia S si en cada uno de sus puntos es tangente al menos a una superficie de la familia y si a lo largo de toda curva sobre la superficie F es tangente a ella un conjunto infinito de superficies de la familia.

Teorema. Dada una familia biparamétrica de superficies

$$\varphi(x, y, z, \alpha, \beta) = 0, \quad a \leqslant \alpha \leqslant b, \quad c \leqslant \beta \leqslant d,$$

donde $\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2 \neq 0$, *la envolvente de la misma se determina por las ecuaciones*

$$\varphi = 0, \quad \varphi_\alpha = 0 \text{ y } \varphi_\beta = 0.$$

No daremos la demostración de este teorema ya que no lo emplearemos en la exposición sucesiva.

§ 5. Envolvente de una familia de planos dependientes de un parámetro

Analicemos la estructura de una superficie F que representa la envolvente de una familia monoparamétrica de planos.

Consideremos la forma vectorial de la ecuación de los planos de la familia

$$\boldsymbol{r}\boldsymbol{b}(\alpha) + a(\alpha) = 0$$

lo que corresponde a la denotación escalar

$$xb_1(\alpha) + yb_2(\alpha) + zb_3(\alpha) + a(\alpha) = 0.$$

Sin perder generalidad, podemos asumir que el vector $\boldsymbol{b}$ es unitario pues siempre podemos dividir la ecuación por $|\boldsymbol{b}(\alpha)|$ $(\boldsymbol{b}(\alpha) \neq 0)$. Respecto a la función vectorial $\boldsymbol{b}(\alpha)$ y a la función escalar $a(\alpha)$ aceptaremos que son dos veces diferenciables y que, además, son distintas de cero $\boldsymbol{b}'(\alpha)$ y $\boldsymbol{b}''(\alpha)$.

La envolvente F satisface las ecuaciones

$$\boldsymbol{r}\boldsymbol{b} + a = 0 \text{ y } \boldsymbol{r}\boldsymbol{b}' + a' = 0. \qquad (*)$$

Para α fijo estas ecuaciones determinan una recta g_α. Es decir, la superfice F es descrita por la recta g_α.

Consideremos tres planos:

$$\boldsymbol{r}\boldsymbol{b}+a=0, \quad \boldsymbol{r}\boldsymbol{b}'+a'=0 \quad y \quad \boldsymbol{r}\boldsymbol{b}''+a''=0; \qquad (**)$$

los dos primeros determinan la envolvente. Respecto a estos tres planos pueden hacerse tres hipótesis principales:

1. Los tres planos (**) no tienen puntos comunes para ningún α.

2. Los tres planos (**) se cortan en un único punto S, el mismo para todos los α.

3. Los tres planos (**) se cortan en un punto $S(\alpha)$ cuya posición depende substancialmente de α, en el sentido de que siendo $\tilde{\boldsymbol{r}}(\alpha)$ el vector del punto $S(\alpha)$, se tiene $\tilde{\boldsymbol{r}}'(\alpha) \neq 0$.

Consideremos el primer caso. Sea $\boldsymbol{n}(\alpha)$ el vector unitario de la recta g_α. Tenemos

$$\boldsymbol{b}\boldsymbol{n}=0, \quad \boldsymbol{b}'\boldsymbol{n}=0 \quad \text{y} \quad \boldsymbol{b}''\boldsymbol{n}=0.$$

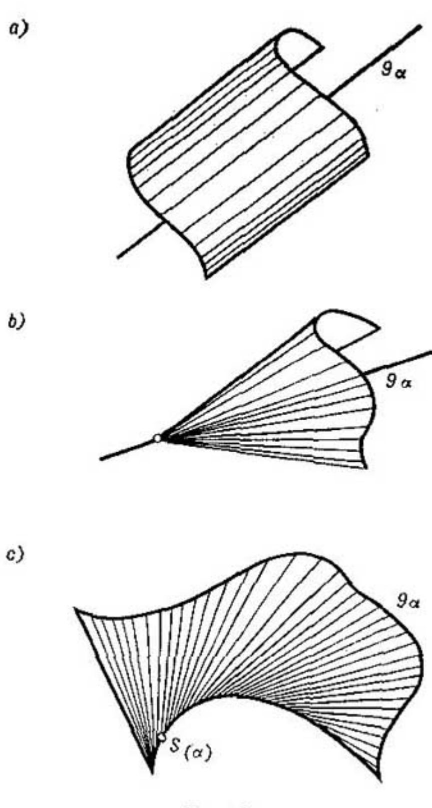


Fig. 33

Derivando las dos primeras igualdades, encontramos

$$\boldsymbol{b}'\boldsymbol{n}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{n}'=0 \quad \text{y} \quad \boldsymbol{b}''\boldsymbol{n}+\boldsymbol{b}'\boldsymbol{n}'=0.$$

De aquí resulta que $\boldsymbol{b}\boldsymbol{n}' = 0$ y $\boldsymbol{b}'\boldsymbol{n}' = 0$. Puesto que, ademas, $\boldsymbol{n}'\boldsymbol{n} = 0$, se tiene $\boldsymbol{n}' = 0$ y, por consiguiente, $\boldsymbol{n}$ no depende de α. Es decir, en este caso todas las rectas g_α son paralelas y la superficie F, formada por las rectas g_α, es *cilíndrica* (fig. 33, *a*).

En el segundo caso, las rectas g_α pasan por un punto fijo (S) del espacio y, por consiguiente, la superfice F F es *cónica* (fig. 33, *b*).

Consideremos, finalmente, el tercer caso. Mostremos que *en este caso las rectas* g_α, *que forman la superficie* F, *son tangentes a una curva* (fig. 33, *c*).

Sea $\tilde{\boldsymbol{r}}(\alpha)$ el vector del punto de intersección de los planos (**). Tenemos

$$\tilde{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{b}+a=0, \ \tilde{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{b}'+a'=0 \ \text{y} \ \tilde{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{b}''+a''=0.$$

Derivando la primera igualdad y restándole la segunda, obtenemos $\tilde{\boldsymbol{r}}'\boldsymbol{b}=0$. Análogamente, de la segunda y tercera igualdades enconamos $\tilde{\boldsymbol{r}}'\boldsymbol{b}' = 0$. De aquí resulta que $\tilde{\boldsymbol{r}}' \parallel (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{b}')$.

Ya que la recta g_α pasa por el punto $S(\alpha)$ y es perpendicular a los vectores $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{b}'$, debe ser paralela al vector $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{b}' \parallel \tilde{\boldsymbol{r}}'$ y es de esta forma tangente a la curva

$$\boldsymbol{r}=\tilde{\boldsymbol{r}}(\alpha)$$

que describe el punto $S(\alpha)$. Esta curva se denomina *arista de retroceso* de la superficie.

Los resultados de este parágrafo pueden resumirse en el teorema siguiente.

Teorema. La envolvente de una familia monoparamétrica de planos en los casos principales representa una región de una superficie cilíndrica, o bien de una superficie cónica, o bien de una superficie formada por las tangentes a una curva espacial.

Es fácil comprobar mediante un estudio directo que, recíprocamente, los planos tangentes forman en cada uno de estos casos una familia monoparamétrica. Proponemos esto como un ejercicio.

EJERCICIOS PARA EL CAPITULO V

1. Hallar la ecuación del plano tangente al elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

en el punto (x', y', z').

Respuesta. $\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}+\frac{zz'}{c^2}=1.$

2. Hallar la ecuación del plano tangente a la esfera

$x = a \cos v \operatorname{sen} u,\ y = a \cos v \cos u,\ z = a \operatorname{sen} v$

en el punto $(a, 0, 0)$.

Respuesta. $x - a = 0$.

3. Probar que todos los planos tangentes a la superficie definida por la ecuación

$$z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

pasan por el origen de coordenadas.

4. Probar que las superficies

$$x^2+y^2+z^2=\alpha x,\ x^2+y^2+z^2=\beta y \text{ y } x^2+y^2+z^2=\gamma z$$

se cortan formando ángulo recto.

5. Probar que las normales a la superficie

$$x = \varphi(u) \cos v,\ y = \varphi(u) \operatorname{sen} v,\ z = \psi(u)$$

cortan el eje z.

6. Hallar la superficie formada por las normales a la superficie

$$y = x \operatorname{tg} z$$

trazadas en los puntos de la recta

$$y = x,\quad z = \frac{\pi}{4}.$$

Respuesta. Un paraboloide biperbólico.

7. Hallar en el punto. $(0, 0, c)$ la ecuación del paraboloide osculador al elipsoide dado en el ejercicio 1.

Respuesta. $z = c\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\right)$

8. Estudiar el carácter de los puntos (elípticos, hiperbólicos, parabólicos, planos) en las superficies de segundo orden.

9. Hallar la posición del centro y el radio de la esfera osculatriz a la hélice

$$x = a \cos t,\ y = a \operatorname{sen} t,\ z = bt$$

en el punto $(a, 0, 0)$.

Respuesta. El centro en $(-\frac{b^2}{a}, 0, 0)$ y el radio igual a $a+\frac{b^2}{a}$.

10. Hallar la envolvente de la familia de esferas

$$(x-a)^2+y^2+z^2=1.$$

Respuesta. El cilindro $y^2+z^2=1$.

11. Hallar la envolvente de la familia de planos que forman en el ángulo de coordenadas $x, y, z > 0$ tetraedros de volumen constante.

Respuesta. $xyz = \text{const}$.

PROBLEMAS Y TEOREMAS PARA EL CAPITULO V

1. Demostrar que si una superficie suave Φ y un plano α tienen sólo un punto común P, el plano es el plano tangente a la superficie en el punto P.

2. Demostrar que son paralelos a una recta los planos tangentes a la superficie de traslación

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{U}(u) + \boldsymbol{V}(v)$$

trazados en los puntos de cualquier curva de traslación (las líneas $u = \text{const}$ y $v = \text{const}$).

3. Demostrar que las familias de elipsoides o de hiperboloides de una o dos hojas cofocales determinadas por las ecuaciones

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}+\frac{z^2}{c^2-\lambda}=1$$

se cortan formando ángulo recto.

4. Demostrar que si una superficie es tangente a un plano a lo largo de una línea, todo punto de esta línea es un punto parabólico o un punto plano.

5. Sean Φ una superficie, P un punto de la misma y α el plano tangente en el punto P. Demostrar que

1) si el punto P es elíptico, todos los puntos de la superficie Φ suficientemente próximos a P se encuentran a un lado del plano α;

2) si el punto P es hiperbólico, podrán encontrarse puntos de la superficie tan próximos a P como se quiera situados a distintos lados del plano α;

3) si el punto P es parabólico o plano, pueden darse ambos casos (citar ejemplos).

6. Demostrar que la transformación proyectiva (afín, en particular) conserva la propiedad de un punto de ser punto elíptico, hiperbólico o plano.

7. Demostrar que la curva γ sobre una superficie es plana si todos sus puntos son planos.

8. Diremos que una curva es *esférica* si todos sus puntos pertenecen a una esfera.

Sea

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$$

una curva y sea $P(t_0)$ un punto cualquiera de la misma. Para que esta curva sea esférica es necesario y suficiente que la curva definida por la ecuación

$$\boldsymbol{r}=\frac{\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{r}(t_0)}{|\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{r}(t_0)|^2}$$

sea plana; demostrar esta proposición.

9. Sea γ una curva cualquiera sobre la superficie Φ que pasa por el punto P. Demostrar que la tangente a la curva γ en el punto P se encuentra en el plano tangente a la superficie en este punto.

10. Sea U el paraboloide osculador a la superficie Φ en el punto P. Demostrar que cualquier curva de la superficie que pase por el punto P tiene en este punto un contacto de orden dos con el paraboloide.

11. Demostrar que cualquier transformación analítica del espacio

$$x' = \varphi_1(x, y, z),\ y' = \varphi_2(x, y, z),\ z' = \varphi_3(x, y, z),$$

donde φ_1, φ_2 y φ_3 son unas funciones analíticas con el jacobiano distinto de cero, conserva la propiedad de una curva y de una superficie de tener un contacto de orden dado.

12. Demostrar que si el borde de una superficie pertenece a un plano, esta superficie es una región de este plano o la superficie tiene puntos elípticos.

Demostrar que toda superficie cerrada tiene puntos elípticos.

13. Demostrar que la recta pertenece íntegramente a la superficie de segundo grado si la recta tiene un contacto de orden dos con la superficie.

14. Demostrar que no tiene envolvente la familia de superficies definidas por las ecuaciones

$$\varphi(x, y, z) = \alpha,$$

donde φ es una función regular de las variables x, y y z.

15. Demostrar que la superficie es una superficie de revolución si todas las normales a la misma cortan una recta determinada

16. Demostrar que la superficie es una esfera o una región de una esfera si las normales a la misma pasan por un mismo punto.

CAPITULO VI

PRIMERA FORMA CUADRATICA DE UNA SUPERFICIE Y CUESTIONES ADJUNTAS DE LA TEORIA DE SUPERFICIES

Sean Φ una superficie regular, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ alguna parametrización regular de la misma y $\boldsymbol{n}$ el vector unitario de la normal a la superficie en el punto (u, v).

En la teoría de superficies desempeñan un papel importante tres formas cuadráticas ligadas a la superficie:

$$d\boldsymbol{r}^2, \quad -d\boldsymbol{r}\, d\boldsymbol{n} \quad \text{y} \quad d\boldsymbol{n}^2.$$

La primera forma cuadrática $I = d\boldsymbol{r}^2$ es definida positiva ya que no toma valores negativos y se anula sólo para $du = dv = 0$. En efecto, si $d\boldsymbol{r}^2 = 0$, entonces $d\boldsymbol{r} =$

$= \boldsymbol{r}_u du + \boldsymbol{r}_v dv = 0$. Pero como $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \neq 0$, esto es posible sólo si $du = dv = 0$.

Para los coeficientes de la primera forma cuadrática de la superficie emplearemos las designaciones: $\boldsymbol{r}_u^2 = E$, $\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v = F$ y $\boldsymbol{r}_v^2 = G$. Es decir,

$$I = d\boldsymbol{r}^2 = (\boldsymbol{r}_u\, du + \boldsymbol{r}_v\, dv)^2 = \boldsymbol{r}_u^2\, du^2 + 2\,(\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v)\, du\, dv + \\ + \boldsymbol{r}_v^2\, dv^2 = E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2.$$

En este capítulo consideraremos algunas cuestiones de la teoría de superficies ligadas a la primera forma cuadrática.

§ 1. Longitud de una curva sobre una superficie

Consideremos una superficie simple Φ y una curva γ que se encuentra sobre ella. Sean P_0 un punto común de la superficie y de la curva, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}\,(u, v)$ alguna parametrización de la superficie en un entorno del punto P_0 y $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}\,(t)$ alguna parametrización de la curva en un entorno de este punto. Supongamos que u_0, v_0 y t_0 son los valores de los parámetros correspondientes al punto P_0.

Siendo δ suficientemente pequeño, todo punto $P\,(t)$ de la curva con $|\,t - t_0\,| < \delta$ pertenece al entorno parametrizado del punto P_0 de la superficie. Por consiguiente, a todo punto $P\,(t)$ le corresponden unívocamente los valores $u\,(t)$ y $v\,(t)$ de modo que $\boldsymbol{r}\,(t) = \boldsymbol{r}\,(u\,(t), v\,(t))$. Denominaremos ecuaciones de la curva sobre la superficie a las igualdades $u = u\,(t)$, $v = v\,(t)$.

Sean Φ una superficie regular y γ una curva regular sobre ella. Sean $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}\,(u, v)$ y $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}\,(t)$ sus parametrizaciones regulares en un entorno del punto P_0 que cumplen las condiciones habituales $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \neq 0$ y $\boldsymbol{r}'^2\,(t) \neq 0$. Entonces, las funciones $u\,(t)$ y $v\,(t)$, que figuran en las ecuaciones de la curva sobre la superficie

$$u = u\,(t), \quad v = v\,(t),$$

son funciones regulares y, además, $u'^2\,(t) + v'^2\,(t) \neq 0$.

Para demostrar esta afirmación basta aplicar el teorema de las funciones implícitas al sistema de ecua-

ciones

$$x(t) = x(u, v), \quad y(t) = y(u, v), \quad z(t) = z(u, v)$$

respecto a las cuales se conoce de antemano que las funciones $u(t)$ y $v(t)$ las satisfacen.

Sean ahora Φ una superficie general y γ una curva general. Por definición, la superficie Φ es la imagen obtenida por una aplicación localmente topológica φ de una superficie $\overline{\Phi}$ en el espacio. Diremos que la curva γ se encuentra sobre la superficie Φ si en la superficie $\overline{\Phi}$ existe una curva $\overline{\gamma}$ cuya imagen por la aplicación φ es la curva γ.

De ello se deduce que si $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ es una parametrización de la superficie Φ en un entorno del punto $\varphi(\overline{P})$ y $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ es una parametrización de la curva en un entorno de este punto, entonces existen unas funciones $u = u(t)$ y $v = v(t)$ que satisfacen la igualdad $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(u(t), v(t))$. Es decir, *toda curva sobre la superficie siempre puede ser dada en un entorno de cada uno de sus puntos mediante las igualdades $u = u(t)$, $v = v(t)$, con la particularidad de que las funciones $u(t)$ y $v(t)$ son regulares si la superficie y la curva lo son.*

Consideremos la longitud de una curva sobre una superficie. Sea Φ una superficie regular y $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ una parametrización regular de la misma. Sea γ una curva regular sobre la superficie dada por las ecuaciones $u = u(t)$, $v = v(t)$. Hallemos la expresión de la longitud de arco del segmento de la curva con extremos en los puntos $P_0(t_0)$ y $P(t)$.

Tenemos

$$s(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} |\boldsymbol{r}'(t)|\, dt = \int_{t_0}^{t} |\boldsymbol{r}'(u(t), v(t)|\, dt =$$

$$= \int_{\gamma(P_0, P)} |d\boldsymbol{r}(u, v)| = \int_{\gamma(P_0, P)} \sqrt{I},$$

donde I es la primera forma cuadrática de la superficie.

Como vemos, para medir las longitudes de las curvas sobre la superficie es suficiente conocer la primera forma cuadrática de la superficie. Debido a ello se dice que la

primera forma cuadrática determina *la métrica* de la superficie y esta forma suele denominarse con frecuencia *elemento lineal de la superficie.*

La primera forma cuadrática no determina la superficie unívocamente. Es fácil citar ejemplos de distintas superficies que, con una parametrización adecuada, tengan idénticas las formas cuadráticas. Pero, hablando en términos generales, tomadas arbitrariamente dos superficies, no existen parametrizaciones para las cuales coincidan las primeras formas cuadráticas. Volveremos a tratar este problema más adelante.

§ 2. Angulo entre curvas sobre una superficie

Introduzcamos el concepto de dirección sobre la superficie. Denominaremos *dirección* $(du : dv)$ sobre la superficie Φ, dada por la ecuación $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$, a la dirección del vector $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u\, du + \boldsymbol{r}_v\, dv$. A veces designaremos esta dirección simplemente por (d).

Denominaremos *ángulo entre las direcciones* $(du : dv)$ y $(\delta u : \delta v)$ el ángulo que forman los vectores

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u\, du + \boldsymbol{r}_v\, dv \quad \text{y} \quad \delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u\, \delta u + \boldsymbol{r}_v\, \delta v.$$

Hallemos la expresión para el ángulo de las direcciones (d) y (δ).

Tenemos

$$d\boldsymbol{r}\cdot\delta\boldsymbol{r} = |d\boldsymbol{r}|\,|\delta\boldsymbol{r}|\cos\vartheta,$$

$$d\boldsymbol{r}^2 = E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2 = I(d),$$

$$\delta\boldsymbol{r}^2 = E\, \delta u^2 + 2F\, \delta u\, \delta v + G\, \delta v^2 = I(\delta),$$

$$d\boldsymbol{r}\delta\boldsymbol{r} = E\, du\, \delta u + F\,(du\, \delta v + dv\, \delta u) + G dv \delta v = J\,(d,\delta).$$

De aquí obtenemos para $\cos\vartheta$ la siguiente expresión:

$$\cos\vartheta = \frac{I(d,\,\delta)}{\sqrt{I(d)\, I(\delta)}}.$$

Diremos que la curva γ sobre la superficie definida por la ecuación $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ tiene en el punto (u,v) la dirección $(du : dv)$ si el vector $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u\, du + \boldsymbol{r}_v\, dv$ es el vector tangente a la curva en este punto.

Si la curva sobre la superficie viene dada por las ecuaciones $u = u(t)$, $v = v(t)$, entonces en el punto $(u(t), v(t))$ tiene la dirección $(u'(t) : v'(t))$.

Si dos curvas γ y $\bar{\gamma}$ sobre la superficie Φ tienen el punto común (u, v) se denomina *ángulo* de estas curvas en el punto (u, v) el ángulo de sus direcciones en dicho punto. Es decir, el ángulo de las curvas sobre la superficie es el ángulo que forman las tangentes a las curvas; por consiguiente, no depende de la parametrización de la superficie ni de la parametrización de la curva.

Ejemplo. Las líneas coordenadas sobre la superficie (las líneas $u = \text{const}$ y las líneas $v = \text{const}$) tienen las direcciones $(0 : dv)$ y $(\delta u : 0)$. Pos esto, para el ángulo de las líneas coordenadas obtenemos la expresión

$$\cos\vartheta = \frac{F\, dv\delta u}{\sqrt{G\, dv^2}\sqrt{E\delta u^2}} = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

De aquí se deduce que *la red de coordenadas sobre la superficie es ortogonal* (*o sea, las líneas coordenadas se cortan en ángulo recto*) *si, y sólo si,* $F = 0$.

Supongamos dada en un entorno del punto (u_0, v_0) de la superficie regular Φ una familia de curvas sobre la superficie definidas mediante la ecuación $\varphi(u, v) = \text{const}$ siendo $\varphi_u^2 + \varphi_v^2 \neq 0$ en el punto (u_0, v_0). Construyamos otra familia de curvas ortogonal a la primera. Con este fin hallemos la ecuación diferencial de las líneas de la segunda familia aceptando que existe esta familia.

La dirección de la línea de la primera familia en el punto (u, v) es $(\varphi_v : -\varphi_u)$. Si designamos por $(du : dv)$ la dirección de la línea de la segunda familia en este punto, la condición de ortogonalidad de estas direcciones será

$$E\varphi_v\, du + F(\varphi_v\, dv) - \varphi_u\, du) - G\varphi_u\, dv = 0,$$

o sea,

$$(E\varphi_v - F\varphi_u)\, du + (F\varphi_v - G\varphi_u)\, dv = 0. \qquad (*)$$

Esta es precisamente la ecuación diferencial de las líneas de la segunda familia.

Teorema. En un entorno de todo punto de la superficie se puede introducir una parametrización ortogonal regular

con la particularidad de que una familia de líneas coordenadas se puede escoger arbitrariamente.

En efecto, sea $\varphi(u, v) = \text{const}$ una familia de curvas sobre la superficie y sea $\varphi(u, v)$ una función regular que satisface la condición $\varphi_w^2 + \varphi_v^2 \neq 0$. Consideremos dos ecuaciones diferenciales

$$\varphi_u \, du + \varphi_v \, dv = 0,$$
$$(E\varphi_v - F\varphi_u) \, du + (F\varphi_v - G\varphi_u) \, dv = 0.$$

Las curvas integrales de la primera ecuación son las curvas de la familia dada mientras que las curvas integrales de la segunda ecuación representan sus trayectorias ortogonales.

Según el § 3 del capítulo IV, la superficie puede parametrizarse de modo que las curvas indicadas constituyan las líneas coordenadas ya que

$$\begin{vmatrix} E\varphi_v - E\varphi_u & F\varphi_v - G\varphi_u \\ \varphi_u & \varphi_v \end{vmatrix} = E\varphi_v^2 - 2F\varphi_u\varphi_v + G\varphi_u^2 \neq 0$$

debido a que la primera forma cuadrática es definida.

Hemos demostrado el teorema.

§ 3. Area de una superficie

Sea F una superficie suave y sea G una región de la misma limitada por un número finito de curvas suaves a trozos. Dividamos la región G en regiones pequeñas empleando para ello curvas suaves a trozos. Sea g una de estas regiones. Tomemos en g un punto arbitrario P y proyectemos esta región sobre el plano tangente en el punto P. Si la región g es suficientemente pequeña, esta proyección resulta inyectiva y en el plano tangente se obtiene una región $\bar{g}$ limitada también por curvas suaves a trozos. Designemos por $\sigma(\bar{g})$ el área de la región $\bar{g}$ (fig. 34).

Por *área* de la región G de la superficie F entendemos el límite

$$\lim \sum \sigma(\bar{g}),$$

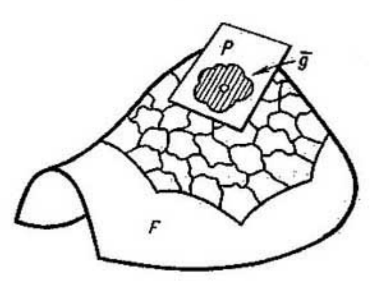


Fig. 34

donde la suma se refiere a todas las regiones g de la partición de G y el paso al límite se realiza aceptando que las dimensiones de las regiones g de la partición de G disminuyen indefinidamente.

Esta definición del área de una superficie corresponde plenamente a la intuición que, cuando se trata de medir un área, nos hace dividir la superficie y «aplanar» los trozos obtenidos. Demostraremos que, así definida, el área de la superficie posee efectivamente su característica propiedad aditiva y obtendremos asimismo la fórmula que permite calcular el área cualquiera que sea la parametrización de la superficie.

Supongamos, para simplificar los razonamientos, que existe una parametrización suave válida para toda la superficie:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}\,(u,\ v).$$

A la región G sobre la superficie le corresponde una región $\tilde{G}$ del plano uv limitada por curvas suaves a trozos y a una partición de la región G mediante curvas suaves a trozos en regiones g le corresponde una partición de la región G en regiones $\tilde{g}$ mediante curvas suaves a trozos.

Determinemos el área $\sigma\,(\tilde{g})$ de la región $\tilde{g}$. Consideremos con este fin las coordenadas cartesianas rectangulares x, y y z tomando como origen de coordenadas el punto P de la superficie, como plano xy el plano tangente en P y como eje z la normal a este plano.

La región g de la superficie F se define en coordenadas cartesianas mediante las ecuaciones
$x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, $(u, v) \subset \tilde{g}$.
Las igualdades

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad (u, v) \subset \tilde{g}$$

determinan una aplicación biunívoca de la región $\bar{g}$ sobre $\tilde{g}$. Los números u y v pueden ser considerados como las coordenadas curvilíneas en la región $\bar{g}$.

Como se sabe, el área de una región se determina, en coordenadas curvilíneas, mediante la fórmula

$$\sigma(\bar{g}) = \iint_{\tilde{g}} \left\| \begin{matrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{matrix} \right\| du\, dv.$$

El vector $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v$ tiene la dirección de la normal a la superficie y como la normal en el punto P coincide con el eje z, resulta que el módulo del vector $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v$ en este punto es igual al valor absoluto de su componente respecto al eje z, o sea,

$$|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| = \left\| \begin{matrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{matrix} \right\|.$$

De ello se deduce, por continuidad, que para cualesquiera u, v de $\tilde{g}$ se tiene

$$\left\| \begin{matrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{matrix} \right\| = |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| + \varepsilon_g(u, v),$$

donde ε_g es tan pequeño como se quiera si son pequeñas las dimensiones de la región g.

Para la suma de las áreas $\sigma(\bar{g})$ tenemos

$$\sum \sigma(\bar{g}) = \sum \iint_{\tilde{g}} (|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| + \varepsilon_g(u, v))\, du\, dv =$$

$$= \iint_{G} |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|\, du\, dv + \sum \iint_{\tilde{g}} \varepsilon_g\, du\, dv.$$

Si la partición de G se ha realizado en regiones g suficientemente menudas, las magnitudes ε_g resultarán menores

que cualuier $\varepsilon > 0$, por pequeño que sea, debido a la continuidad uniforme de $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v$ en $\widetilde{G}$. Por esto,

$$\left| \sum \iint_{\widetilde{g}} \varepsilon_g \, du \, dv \right| < \varepsilon \sum \sigma(\widetilde{g}) = \varepsilon \sigma(\widetilde{G}),$$

donde $\sigma(\widetilde{G})$ es el área de la región $\widetilde{G}$.

De aquí se deduce que

$$\sum \sigma(\widetilde{g}) \to \iint_{\widetilde{G}} |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| \, du \, dv$$

cuando las regiones g de la partición de la región G disminuyen indefinidamente. Con esto queda probado que el área existe y se expresa mediante la fórmula

$$\sigma(G) = \iint_{\widetilde{G}} |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| \, du \, dv.$$

La propiedad aditiva del área de la superficie se deduce de la propiedad aditiva de la integral. Efectivamente, supongamos que una curva suave a trozos divide la región G en dos regiones G_1 y G_2; sean $\widetilde{G}_1$ y $\widetilde{G}_2$ las regiones correspondientes del plano uv. Tenemos

$$\iint_{\widetilde{G}} |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| \, du \, dv = \iint_{\widetilde{G}_1} |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| \, du \, dv + \\ + \iint_{\widetilde{G}_2} |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| \, du \, dv.$$

Pero esto significa que

$$\sigma(G) = \sigma(G_1) + \sigma(G_2);$$

esta fórmula expresa la propiedad aditiva del área de la superficie.

Ahora, cuando hemos demostrado que el área es aditiva, podemos calcular el área de una superficie dividiéndola en partes y empleando para cada parte una parametrización adecuada.

Para terminar, mostremos que el área de la superficie se determina por su primera forma cuadrática exclusiva-

mente. En efecto,

$$|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|^2 = \boldsymbol{r}_u^2 \boldsymbol{r}_v^2 - (\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v)^2 = EG - F^2,$$

de donde

$$\sigma = \iint \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv.$$

En particular, si la superficie viene dada por la ecuación $z = z(x, y)$ se tiene

$$\sigma = \iint \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy.$$

§ 4. Aplicación conforme

Sean Φ_1 y Φ_2 dos superficies regulares. Una aplicación topológica de la superficie Φ_1 sobre la superficie Φ_2 se denomina *conforme* si conserva los ángulos de las curvas, o sea, si las curvas correspondientes de estas superficies forman, al cortarse, ángulos idénticos.

Teorema. Si dos superficies regulares Φ_1 y Φ_2 se han parametrizado de modo que son proporcionales los coeficientes de sus primeras formas cuadráticas, entonces es conforme la aplicación de una de las superficies sobre la otra que asocia los puntos de coordenadas iguales. Recíprocamente, si las superficies Φ_1 y Φ_2 se han parametrizado de modo que resulta conforme la correspondencia que asocia puntos de coordenadas iguales, entonces son proporcionales las primeras formas cuadráticas de las superficies.

Demostración. Sean

$$I_1 = E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2,$$
$$I_2 = \lambda\, (E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2)$$

las primeras formas cuadráticas de las superficies Φ_1 y Φ_2. Si la aplicación de Φ_1 sobre Φ_2 consiste en asociar puntos de coordenadas iguales, las curvas correspondientes tienen ecuaciones internas idénticas $u = u(t)$, $v = v(t)$ y, por consiguiente, se obtiene una misma expresión para el ángulo que forman las curvas correspondientes, o sea, la aplicación es conforme. Hemos demostrado la primera parte del teorema.

Demostremos la segunda parte del teorema.

Sea (u, v) una parametrización arbitraria de la superficie Φ_1. Parametricemos la superficie Φ_2 tomando como coordenadas de cualquier punto de la misma las coordenadas del punto de Φ_1 que le corresponde por la aplicación conforme. Sean

$$I_1 = E_1\, du^2 + 2F_1\, du\, dv + G_1\, dv^2,$$
$$I_2 = E_2\, du^2 + 2F_2\, du\, dv + G_2\, dv^2$$

las primeras formas cuadráticas de las superficies correspondientes a estas parametrizaciones. Mostremos que los coeficientes E_1, F_1 y G_1 son proporcionales a E_2, F_2 y G_2.

Puesto que la aplicación es conforme, la ortogonalidad de las direcciones (d) y (δ) respecto a la forma I_1 implica la ortogonalidad de las mismas respecto a la forma I_2. Por esto, de

$$E_1\, du\, \delta u + F_1\,(du\, \delta v + dv\, \delta u) + G_1\, dv\, \delta v = 0$$

se deduce

$$E_2\, du\, \delta u + F_2\,(du\, \delta v + dv\, \delta u) + G_2\, dv\, \delta v = 0.$$

Eliminando δu y δv, obtenemos de aquí

$$\frac{E_1\, du + F_1\, dv}{E_2\, du + F_2\, dv} = \frac{F_1\, du + G_1\, dv}{F_2\, du + G_2\, dv}.$$

Como du y dv son arbitrarios, tomando $dv = 0$ obtenemos

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{F_1}{F_2}$$

y para $du = 0$ obtenemos

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{G_1}{G_2}.$$

Hemos demostrado completamente el teorema.

Aparte de conservar los ángulos, la aplicación conforme posee otra propiedad notable; a saber, *son semejantes en primera aproximación las figuras suficientemente pequeñas que se corresponden en las superficies por la aplicación conforme.* Efectivamente, sea F_1 una figura pequeña de la superficie Φ_1. La distancia entre sus puntos (u, v) y $(u + \Delta u, v + \Delta v)$ en primera aproximación es igual a

$$E\Delta u^2 + 2F\, \Delta u\, \Delta v + G\, \Delta v^2,$$

La distancia entre los puntos correspondientes de la figura F_2 de la superficie Φ_2 en primera aproximación es igual a

$$\lambda\,(E\Delta u^2 + 2F\Delta u\Delta v + G\Delta v^2).$$

Es decir, el coeficiente de alteración es igual a λ y, por consiguiente, es casi constante si la figura F_1 es suficientemente pequeña.

Teorema. Sean Φ_1 y Φ_2 dos superficies regulares y P_1 y P_2 dos puntos arbitrarios de las mismas. Entonces existe una aplicación conforme de un entorno del punto P_1 de la superficie Φ_1 sobre un entorno del punto P_2 de la superficie Φ_2.

La demostración de este teorema se basa en la posibilidad de parametrizar una superficie regular en un entorno de cualquier punto de modo que su primera forma cuadrática correspondiente a esta parametrización sea

$$I = \lambda\,(u,\ v)\,(du^2 + dv^2).$$

No daremos la demostración de esta proposición; señalemos sólo que, una vez parametrizadas de este modo las superficies Φ_1 y Φ_2 en los entornos de los puntos respectivos P_1 y P_2, la aplicación conforme del entorno del punto P_1 de la superficie Φ_1 sobre el entorno del punto P_2 de la superficie Φ_2 se obtiene por asociación de puntos de idénticas coordenadas.

Para terminar, veamos un ejemplo de aplicación conforme de la esfera sobre el plano.

Sea ω la esfera de radio R y centro en el punto $(0,\ 0,\ R)$. Consideremos la aplicación de la esfera ω sobre el plano xy consistente en su proyección desde el polo $S\ (0,\ 0,\ 2R)$. Esta aplicación se denomina *proyección estereográfica* (fig. 35).

Tomemos como coordenadas curvilíneas los ángulos u y v representados en la fig. 35. Entonces, las ecuaciones del plano serán

$$x = 2R\ \mathrm{tg}\ u \cos v, \quad y = 2R\ \mathrm{tg}\ u\ \mathrm{sen}\ v$$

y las ecuaciones de la esfera serán

$$x = 2R\ \mathrm{sen}\ u \cos u \cos v, \quad y = 2R\ \mathrm{sen}\ u \cos u\ \mathrm{sen}\ v,$$

$$z = 2R\ \mathrm{sen}^2 u.$$

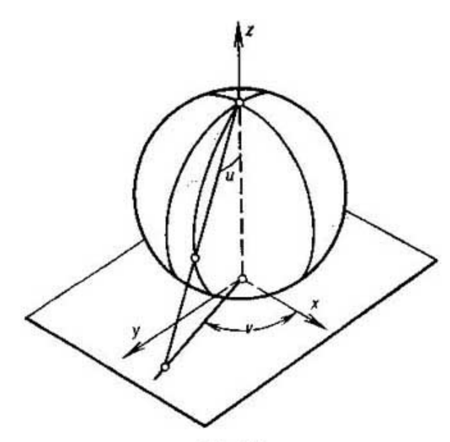


Fig. 35

El elemento lineal del plano será

$$ds^2 = \frac{4R^2}{\cos^4 u}\,(du^2 + \operatorname{sen}^2 u \cos^2 u\, dv^2)$$

y el elemento lineal de la esfera será

$$ds^2 = 4R^2\,(du^2 + \operatorname{sen}^2 u \cos^2 u\, dv^2).$$

De ello se deduce que la aplicación es conforme.

§ 5. Superficies isométricas. Doblamiento de superficies

Las superficies Φ_1 y Φ_2 se llaman *isométricas* si existe una aplicación inyectiva de la superficie Φ_1 sobre la superficie Φ_2 tal que las curvas correspondientes de estas superficies tengan longitudes iguales.

Teorema. Si las superficies regulares Φ_1 y Φ_2 se pueden parametrizar de modo que sus primeras formas cuadráticas sean iguales, estas superficies son isométricas. La aplicación isométrica consiste en hacer corresponder los puntos de coordenadas iguales. Recíprocamente, si las superficies

Φ_1 y Φ_2 son isométricas, pueden ser parametrizadas de modo que sus primeras formas cuadráticas sean iguales.

Demostración. La primera parte del teorema es obvia. Basta observar primero que si la curva γ_1 sobre la superficie Φ_1 viene dada por las ecuaciones $u = u(t)$, $v = v(t)$, la curva que le corresponde sobre la superficie Φ_2 viene dada por las mismas ecuaciones $u = u(t)$, $v = v(t)$ y emplear después la fórmula para la longitud de arco de una curva.

Demostremos la segunda parte del teorema.

Sea P_1 un punto arbitrario de la superficie Φ_1 y sea $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ cualquier parametrización regular de la superficie en un entorno de este punto.

Sea $P_2(u, v)$ el punto de la superficie Φ_2 que corresponde por isometría a $P_1(u, v)$ y sea $\boldsymbol{r}_2(u, v)$ el vector de este punto. La ecuación

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2(u, v)$$

determina una parametrización de la superficie Φ_2 en un entorno del punto P_2. No podemos demostrar en este momento que es regular; sólo podremos hacerlo en el capítulo IX. Pero supongamos que la parametrización $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2(u, v)$ de la superficie Φ_2 es regular. Mostremos que, dada esta parametrización, la primera forma cuadrática de la superficie Φ_2 coincide con la primera forma cuadrática de la superficie Φ_1.

Sea γ_1 una curva arbitraria sobre la superficie Φ_1 y sean $u = u(t)$, $v = v(t)$ sus ecuaciones. La curva que le corresponde por isometría sobre la superficie Φ_2 viene dada por las mismas ecuaciones. Por esto,

$$\int_{t_0}^{t} \sqrt{E_1 u'^2 + 2F_1 u'v' + G_1 v'^2}\, dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t} \sqrt{F_2 u'^2 + 2F_2 u'v' + G_2 v'^2}\, dt.$$

Puesto que esta igualdad es válida para todo t, los integrandos son iguales. Como la curva γ_1 es totalmente arbi-

traria, los integrandos son iguales cualesquiera que sean los valores de u' y v'; pero esto es posible sólo si $E_1 = E_2$, $F_1 = F_2$ y $G_1 = G_2$.

Hemos demostrado el teorema.

Es evidente que las superficies iguales son isométricas. La afirmación recíproca, hablando en términos generales, es falsa. Es fácil dar ejemplos de superficies isométricas que no sean iguales. Veamos uno.

La región rectangular $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $0 < y < 1$ del plano xy es isométrica a la región del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ determinada por las condiciones $0 < z < 1$, $x > 0$ $y > 0$. Basta señalar que esta región del cilindro admite la parametrización $x = \cos u$, $y = \operatorname{sen} u$, $z = v$, $0 < u < \frac{\pi}{2}$, $0 < v < 1$. El elemento lineal del cilindro correspondiente a esta parametrización es $du^2 + dv^2$. De aquí se ve que la aplicación definida por las igualdades $x = u$, $y = v$ es isométrica.

Puesto que los ángulos de las curvas sobre la superficie y el área de la superficie se determinan por la primera forma cuadrática y puesto que las superficies isométricas, adecuadamente parametrizadas, tienen las primeras formas cuadráticas iguales, resulta que *la aplicación isométrica conserva los ángulos de las curvas y conserva las áreas*, o sea, las curvas correspondientes de superficies isométricas forman ángulos iguales y las regiones correspondientes tienen áreas iguales.

Hemos demostrado con un ejemplo que superficies distintas, adecuadamente parametrizadas, pueden tener las primeras formas cuadráticas iguales. Se plantean dos preguntas: ¿en qué grado la primera forma cuadrática determina la superficie? y ¿existe una superficie que tiene como primera forma cuadrática una forma cuadrática escogida arbitrariamente?

Resulta que «localmente» la superficie no queda determinada, ni mucho menos, por su primera forma cuadrática. Se conoce, por ejemplo, el teorema siguiente. *Para todo entorno ω suficientemente pequeño de un punto P de una superficie analítica existen superficies isométricas a ω y distintas de ella.*

Algunas superficies «globalmente» quedan determinadas unívocamente por la primera forma cuadrática. Por ejemplo, *cualquier superficie regular* Φ, *cerrada y convexa, queda determinada unívocamente por la primera forma cuadrática*, en el sentido de que toda superficie regular Φ' isométrica a Φ es igual a Φ. Se puede señalar una clase suficientemente amplia de superficies infinitas que se determinan unívocamente por la primera forma cuadrática. Como ejemplo de una superficie de esta clase podemos señalar un paraboloide elíptico cualquiera.

Se denomina *doblamiento* de la superficie toda deformación continua de la misma que no altera las longitudes de las curvas sobre la superficie. Una idea clara del doblamiento de la superficie se puede obtener doblando una hoja de papel.

Puesto que el doblamiento de la superficie no altera las longitudes de las curvas y, por consiguiente, en todo momento del doblamiento la superficie permanece isométrica a la superficie inicial, obtenemos que durante *el doblamiento de la superficie, adecuadamente parametrizada, su primera forma cuadrática no varía.*

Resulta que «localmente» las superficies, como regla, son suscpetibles al doblamiento. Por ejemplo, tiene lugar el teorema: *para todo punto de una superficie analítica que no sea plano existe un entorno que admite doblamientos continuos.*

Pero entre las superficies existen las que «globalmente» no admiten doblamientos continuos. Así son, por ejemplo, todas las superficies convexas cerradas.

EJERCICIOS PARA EL CAPITULO VI

1. Hallar la primera forma cuadrática de la superficie de revolución

$$x = \varphi(u) \cos v, \quad y = \varphi(u) \operatorname{sen} v, \quad z = \psi(u).$$

Respuesta. $I = (\varphi'^2 + \psi'^2)\, du^2 + \varphi^2\, dv^2$.

2. Demostrar que la superficie de revolución puede parametrizarse de modo que su primera forma cuadrática sea

$$I = du^2 + G(u)\, dv^2.$$

3. Hallar la longitud de arco de la curva dada por la ecuación $u = v$ sobre una superficie con la primera forma cuadrática

$$I = du^2 + \operatorname{sh}^2 u\, dv^2.$$

Respuesta. $s = |\operatorname{sh} u_2 - \operatorname{sh} u_1|$.

4. Hallar el ángulo que forman las líneas coordenadas $x = x_0$ e $y = y_0$ sobre la superficie $z = axy$.

Respuesta. $\cos\vartheta = \dfrac{a^2x_0y_0}{\sqrt{1+a^2x_0^2}\sqrt{1+a^2y_0^2}}$.

5. Demostrar que es ortogonal la red de coordenadas u, v sobre el helicoide

$$x = au\cos v,\ y = au\operatorname{sen} v,\ z = bv.$$

6. Hallar la familia de curvas que forman ángulo recto con las generatrices rectilíneas $x =$ const del paraboloide $z = axy$.

Respuesta. $(1 + a^2x^2)\,y^2 =$ const.

7. Hallar sobre la esfera las curvas que forman ángulo constante con los meridianos (estas curvas se denominan loxodrómicas).

8. Hallar el área del cuadrilátero del helicoide (ejercicio 5) limitado por las curvas

$$u=0,\quad u=\frac{b}{a},\quad v=0 \text{ y } v=1.$$

Respuesta. $\sigma = \dfrac{b^2}{a}(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2}))$.

9. Demostrar que son iguales las áreas de las regiones de los paraboloides

$$z=\frac{a}{2}(x^2+y^2) \text{ y } z=axy$$

que se proyectan en una misma región del plano xy.

10. Demostrar que la superficie es localmente isométrica al plano si admite una parametrización tal que los coeficientes de su primera forma cuadrática no dependan de u ni de v.

PROBLEMAS Y TEOREMAS PARA EL CAPITULO VI

1. Demostrar que siendo $U(x, y)$ y $V(x, v)$ la parte real y la parte imaginaria, respectivamente, de una función de variable compleja $x + iy$, son iguales las áreas de las regiones de las superficies

$$z = U(x, y) \text{ y } z = V(x, y)$$

que se proyectan en una misma región del plano xy.

2. Demostrar que existe una aplicación conforme de la superficie de revolución (ejercicio 1) sobre el plano por efecto de la cual los meridianos de la superficie (las líneas $v =$ const) se transforman en rectas que pasan por el origen de coordenadas y los paralelos (las líneas $u =$ const), en círculos con centro en el origen de coordenadas.

Considerar el caso particular en el que

$$\varphi(u) = \cos u \text{ y } \psi(u) = \operatorname{sen} u$$

(esfera).

3. Demostrar que existe una aplicación conforme de la superficie de revolución sobre el plano por cuyo efecto los meridianos y los paralelos de la superficie se transforman en rectas $x =$ const o $y =$ const. Considerar el caso particular en el que la superficie es una esfera.

4. Demostrar que ni siquiera localmente existe una aplicación isométrica de la esfera sobre el plano.

5. Demostrar que siendo $U(x, y) + iV(x, y)$ una función analítica de variable compleja $x + iy$ con la particularidad de que en el punto (x_0, y_0)

$$\begin{vmatrix} U_x & V_x \\ U_y & V_y \end{vmatrix} \neq 0,$$

es conforme la aplicación del plano sobre sí mismo que asocia al punto con coordenadas cartesianas x e y el punto con coordenadas cartesianas $U(x, y)$ y $V(x, y)$.

6. Sea

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

el elemento lineal de una superficie analítica. Consideremos la ecuación diferencial

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = 0$$

en el plano complejo. Sea $\varphi(u, v) =$ const la solución de esta ecuación y sean $U(x, y)$ y $V(x, y)$ las partes real e imaginaria de la función $\varphi(x, y)$. Demostrar que siendo

$$\begin{vmatrix} U_u & V_u \\ U_v & V_v \end{vmatrix} \neq 0,$$

es conforme la aplicación de la superficie sobre el plano que hace corresponder al punto (u, v) de la superficie el punto del plano de coordenadas cartesianas U y V. (En este resultado puede basarse la demostración del teorema del § 4 del capítulo VI en el caso de superficies analíticas.)

7. La aplicación de una superficie sobre otra se denomina *autálica* si las regiones correspondientes por esta aplicación tienen áreas iguales.

Demostrar que es isométrica toda aplicación conforme y autálica de una superficie sobre otra.

8. Demostrar que cualquier aplicación isométrica del plano sobre sí mismo es un movimiento o bien un movimiento seguido de una aplicación especular.

9. Sean Φ_1 y Φ_2 superficies isométricas y $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1(u, v)$ y $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2(u, v)$ sus parametrizaciones. La aplicación isométrica consiste en poner en coorespondencia los puntos de coordenadas iguales. Sea $\Phi_{\lambda,\mu}$ la superficie definida por la ecuación $\boldsymbol{r} = \lambda \boldsymbol{r}_1(u, v) + \mu \boldsymbol{r}_2(u, v)$. Demostrar que las superficies $\Phi_{\lambda,\mu}$ y $\Phi_{\mu,\lambda}$ son isométricas.

10. Demostrar que existe una aplicación isométrica del helicoide

$$x = u\cos v,\ \ y = u \operatorname{sen} v,\ \ z = mv$$

sobre el catenoide

$$x=\alpha\cos\beta,\quad y=\alpha\operatorname{sen}\beta,\quad z=m\operatorname{arch}\frac{\alpha}{m}$$

tal que las generatrices rectilíneas del helicoide corresponden a los meridianos del catenoide.

11. Demostrar que cualquier superficie helicoidal admite una aplicación isométrica sobre cierta superficie de revolución por cuyo efecto las hélices corresponden a los paralelos (teorema de Bour).

12. Una red de curvas sobre una superficie se denomina red de Chébyshev si son iguales los lados opuestos de todo cuadrilátero formado por las líneas de la red. Demostrar que una condición necesaria y suficiente para que la red de coordenadas sobre la superficie sea una red de Chébyshev es que $E_v = G_u = 0$.

13. Demostrar que si la red de coordenadas es una red de Chébyshev, las coordenadas u y v pueden escogerse de modo que el elemento lineal de la superficie tome la forma

$$ds^2 = du^2 + 2\cos\omega\, du\, dv + dv^2,$$

donde ω es el ángulo que forman las líneas coordenadas.

14. Demostrar que en la superficie de traslación

$$r = U(u) + V(v)$$

las líneas coordenadas forman una red de Chébyshev.

CAPITULO VII

SEGUNDA FORMA CUADRATICA DE UNA SUPERFICIE Y CUESTIONES ADJUNTAS DE LA TEORIA DE SUPERFICIES

Sean Φ una superficie regular, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ alguna parametrización regular de la misma y $\boldsymbol{n}(u, v)$ el vector unitario de la normal a la superficie en el punto $P(u, v)$.

Se denomina segunda forma cuadrática de la superficie la forma cuadrática

$$-d\boldsymbol{r}\, d\boldsymbol{n} = (-\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{n}_u)\, du^2 + (-\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{n}_v - \boldsymbol{r}_v\boldsymbol{n}_u)\, du\, dv + (-\boldsymbol{r}_v\boldsymbol{n}_v)\, dv^2.$$

Para los coeficientes de esta forma emplearemos las notaciones siguientes

$$-\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{n}_u = L,\quad -\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{n}_v - \boldsymbol{r}_v\boldsymbol{n}_u = 2M,\quad -\boldsymbol{r}_v\boldsymbol{n}_v = N.$$

Puesto que $d\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}=0$ y, por consiguiente,

$$d\,(d\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n})=(d^2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n})+(d\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{n})=0,$$

se tiene

$$II=d^2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}=(\boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{n})\,du^2+2\,(\boldsymbol{r}_{uv}\boldsymbol{n})\,du\,dv+(\boldsymbol{r}_{vv}\boldsymbol{n})\,dv^2,$$

de donde

$$L=\boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{n},\quad M=\boldsymbol{r}_{uv}\boldsymbol{n},\quad N=\boldsymbol{r}_{vv}\boldsymbol{n}.$$

Puesto que $\boldsymbol{n}=\dfrac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|}$ y $|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|=\sqrt{EG-F^2}$, se tiene

$$L=\frac{(\boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v)}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|}=\frac{\begin{vmatrix} x_{uu} & y_{uu} & z_{uu}\\ x_u & y_u & z_u\\ x_v & y_v & z_v\end{vmatrix}}{\sqrt{EG-F^2}},$$

$$M=\frac{(\boldsymbol{r}_{uv}\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v)}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|}=\frac{\begin{vmatrix} x_{uv} & y_{uv} & z_{uv}\\ x_u & y_u & z_u\\ x_v & y_v & z_v\end{vmatrix}}{\sqrt{EG-F^2}},$$

$$N=\frac{(\boldsymbol{r}_{vv}\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v)}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|}=\frac{\begin{vmatrix} x_{vv} & y_{vv} & z_{vv}\\ x_u & y_u & z_u\\ x_v & y_v & z_v\end{vmatrix}}{\sqrt{EG-F^2}}.$$

En particular, si la superficie viene dada por la ecuación $z=z\,(x,\ y)$, se tiene

$$L=\frac{z_{xx}}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}},\quad M=\frac{z_{xy}}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}},$$

$$N=\frac{z_{yy}}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}.$$

§ 1. Curvatura de una curva sobre una superficie

Sean Φ una superficie regular, $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}\,(u,\ v)$ alguna parametrización regular de la misma y γ una curva regular sobre la superficie que pasa por el punto $P\,(u,\ v)$ y tiene en este punto la dirección $(du:dv)$. Sea $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}\,(s)$ la parametrización intrínseca de la curva γ.

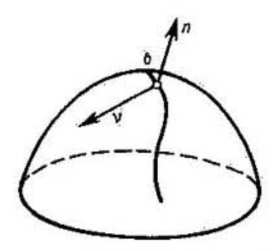


Fig. 36

Consideremos el producto escalar $(\boldsymbol{r}''\boldsymbol{n})$. El vector $\boldsymbol{r}''$ tiene la dirección de la normal principal a la curva y su módulo es igual a la curvatura de la curva. De ello resulta que

$$(\boldsymbol{r}''\boldsymbol{n}) = k\cos\vartheta,$$

donde k es la curvatura de la curva y ϑ es el ángulo que forman la normal principal a la curva y la normal a la superficie (fig. 36). Pero

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}''\boldsymbol{n} &= (\boldsymbol{r}_{uu}u'^2 + 2\boldsymbol{r}_{uv}u'v' + \boldsymbol{r}_{vv}v'^2 + \boldsymbol{r}_u u'' + \boldsymbol{r}_v v'')\,\boldsymbol{n} = \\ &= (\boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{n})\,u'^2 + 2\,(\boldsymbol{r}_{uv}\boldsymbol{n})\,u'v' + (\boldsymbol{r}_{vv}\boldsymbol{n})\,v'^2.\end{aligned}$$

Por esto

$$k\cos\vartheta = \frac{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2} = \frac{II}{I}.$$

El segundo miembro de esta igualdad depende sólo de la dirección de la curva en el punto $P(u, v)$. Es decir,

$$k\cos\vartheta = k_0 = \text{const}$$

en el punto $P(u, v)$ para todas las curvas γ que pasan por este punto y tienen en él una misma dirección (o sea, una misma tangente).

La igualdad

$$k\cos\vartheta = k_0 = \text{const}$$

expresa el teorema de Meusnier.

La magnitud k_0 se denomina *curvatura normal* de la superficie en la dirección dada $(du : dv)$. Salvo el signo, es igual a la curvatura de la curva que se obtiene en la intersección de la superficie y el plano que es perpendicular al plano tangente y que comprende la dirección $(du : dv)$.

La curvatura normal de la superficie en la dirección dada coincide con la curvatura normal del paraboloide osculador en esta misma dirección.

Efectivamente, si referimos la superficie y su paraboloide osculador en el punto P a las coordenadas cartesianas rectangulares tomando como plano xy el plano tangente en este punto y como eje z la normal al mismo, la superficie y el paraboloide vienen dados por las ecuaciones

$$z = z(x, y),$$

$$z = \frac{1}{2}\left(z_{xx}|_P\, x^2 + 2z_{xy}|_P\, xy + z_{yy}|_P\, y^2\right).$$

De aquí se ve que la primera y la segunda formas cuadráticas de la superficie y del paraboloide en el punto P son iguales y, por consiguiente, son iguales las curvaturas normales.

El resultado expuesto permite hallar la ecuación del paraboloide osculador en el sistema de coordenadas ligado de un modo natural a cualquier parametrización (u, v) de la superficie si tomamos el plano tangente en el punto $P(u_0, v_0)$ como plano xy, la normal al mismo como eje z y los vectores $\boldsymbol{r}_u$, $\boldsymbol{r}_v$ y $\boldsymbol{n}$ como vectores de la base.

La ecuación del paraboloide se puede representar, evidentemente, en la forma

$$\boldsymbol{r} = (u-u_0)\,\boldsymbol{r}_u + (v-v_0)\,\boldsymbol{r}_v + \frac{1}{2}\{A(u-u_0)^2 + 2B(u-u_0)(v-v_0) + C(v-v_0)^2\}\,\boldsymbol{n}.$$

La curvatura normal del paraboloide en la dirección $(du : dv)$ será

$$\frac{A\,du^2 + 2B\,du\,dv + C\,dv^2}{\boldsymbol{r}_u^2\,du^2 + 2(\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v)\,du\,dv + \boldsymbol{r}_v^2\,dv^2}.$$

Comparando esta expresión con la curvatura normal de la superficie en la misma dirección y teniendo en cuenta

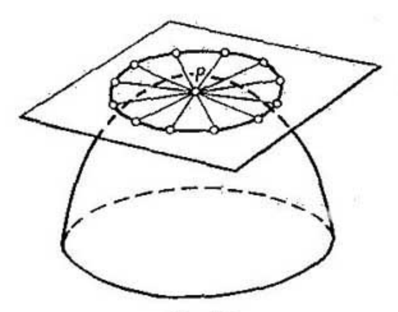


Fig. 37

que du y dv son arbitrarios, deducimos que

$$A = L, \quad B = M \text{ y } \quad C = N.$$

Por esto, la ecuación del paraboloide en forma paramétrica es

$$x = u - u_0, \quad y = v - v_0,$$

$$z = \frac{1}{2} \{L(u - u_0)^2 + 2M(u - u_0)(v - v_0) + N(v - v_0)^2\}$$

lo que equivale a

$$z = \frac{1}{2}(Lx^2 + 2Mxy + Ny^2).$$

A partir de un punto arbitrario $P(u, v)$ de la superficie tomemos en cada dirección $(du : dv)$ un segmento igual a $\left|\frac{1}{k}\right|^{\frac{1}{2}}$, donde k es la curvatura normal de la superficie en esta dirección. El lugar geométrico de los extremos de estos segmentos se denomina *indicatriz de curvatura* de la superficie en el punto P (fig. 37).

También se denomina con frecuencia *indicatriz de Dupin.*

Veamos qué representa en sí la indicatriz de curvatura. Para ello consideremos en el plano tangente a la superficie las coordenadas cartesianas que se obtienen al

tomar el punto de tangencia como origen de coordenadas, las rectas que comprenden los vectores $\boldsymbol{r}_u$ y $\boldsymbol{r}_v$ como ejes de coordenadas y los propios vectores $\boldsymbol{r}_u$ y $\boldsymbol{r}_v$ como vectores de la base. Sean x e y las coordenadas del punto de la indicatriz de curvatura correspondiente a la dirección $(du : dv)$. Tenemos

$$x\boldsymbol{r}_u + y\boldsymbol{r}_v = \left|\frac{1}{k}\right|^{\frac{1}{2}} \frac{\boldsymbol{r}_u\, du + \boldsymbol{r}_v\, dv}{|\boldsymbol{r}_u\, du + \boldsymbol{r}_v\, dv|}.$$

Elevando al cuadrado esta igualdad y observando que $x : y = du : dv$, obtenemos

$$Ex^2 + 2Fxy + Gy^2 = \frac{E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2}{|L\, du^2 + 2M\, du\, dv + N\, dv^2|} = \frac{Ex^2 + 2Fxy + Gy^2}{|Lx^2 + 2Mxy + Ny^2|}.$$

De aquí resulta

$$|Lx^2 + 2Mxy + Ny^2| = 1.$$

Esta es precisamente la ecuación de la indicatriz de curvatura.

De este modo, *la indicatriz de curvatura representa una elipse en un punto elíptico de la superficie* ($LN - M^2 > 0$), *un par de hipérbolas conjugadas en un punto hiperbólico* ($LN - M^2 < 0$) *y un par de rectas paralelas en un punto parabólico* ($LN - M^2 = 0$).

Es evidente que *la superficie y su paraboloide osculador tienen la misma indicatriz de curvatura.*

La indicatriz de curvatura se puede introducir también de otro modo, de carácter más geométrico. Sean P un punto arbitrario de la superficie y α el plano tangente en este punto. Designemos por M_h el lugar geométrico de los puntos de la superficie cuyas distancias a α son iguales a h. Sometámoslo a una transformación de semejanza tomando P como centro de semejanza y $\frac{1}{\sqrt{h}}$ como coeficiente de semejanza. Designemos por $\frac{1}{\sqrt{h}} M_h$ el conjunto de puntos obtenido.

Si el plano tangente en P se toma como plano xy y la normal como eje z, la ecuación de la superficie será

$$z = \frac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2) + (x^2 + y^2)\,\varepsilon(x, y),$$

donde $\varepsilon(x, y) \to 0$ cuando $x, y \to 0$. De aquí que los puntos de M_h satisfacen la ecuación

$$h = \left|\frac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2) + (x^2 + y^2)\,\varepsilon(x, y)\right|.$$

Puesto que las coordenadas de un punto de $\frac{1}{\sqrt{h}} M_h$ difieren en el factor $\sqrt{h}$ de las coordenadas del punto correspondiente de M_h, ellas satisfacen la ecuación

$$1 = \left|\frac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2) + (x^2 + y^2)\,\varepsilon\left(x\sqrt{h},\ y\sqrt{h}\right)\right|.$$

De aquí se ve que $\frac{1}{\sqrt{h}} M_h$ converge a la indicatriz de curvatura cuando $h \to 0$.

§ 2. Direcciones asintóticas. Líneas asintóticas. Direcciones conjugadas. Redes conjugadas sobre la superficie

La dirección $(du : dv)$ en el punto $P(u, v)$ sobre la superficie regular Φ se denomina *asintótica* si la curvatura normal de la superficie en esta dirección es igual a cero. Es decir, la dirección $(du : dv)$ será asintótica si, y sólo si, se cumple la condición

$$L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = 0.$$

De ello resulta que *en un punto elíptico de la superficie no existen direcciones asintóticas, en un punto hiperbólico existen dos direcciones asintóticas, en un punto parabólico existe una dirección asintótica y, finalmente, en un punto plano cualquier dirección es asintótica.*

Una curva sobre la superficie se denomina *línea asintótica* si su dirección es asintótica en todo punto.

De aquí se deduce que

$$L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = 0$$

es la ecuación diferencial de las líneas asintóticas.

Si la superficie contiene una recta, ésta será obviamente una línea asintótica.

Señalemos una propiedad sencilla de las líneas asintóticas. *El plano tangente a la superficie en todo punto de una línea asintótica es el plano osculador.* Efectivamente, si en el punto P de la línea asintótica γ la curvatura es igual a cero, el plano tangente a la superficie en el punto P será el plano osculador ya por el hecho de comprender la tangente a la curva. Si la curvatura de γ en el punto P es distinta de cero, el plano tangente contiene los vectores $d\boldsymbol{r}$ y $d^2\boldsymbol{r}$ (el primero porque el plano es tangente y el segundo porque la curva γ es asintótica y, por consiguiente, satisface la condición $d^2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n} = 0$). De aquí se deduce que también en este caso el plano tangente es el plano osculador a la línea asintótica.

Veamos en qué condiciones resultan asintóticas las líneas coordenadas $u = \text{const}$ y $v = \text{const}$ de la superficie. Introduciendo sucesivamente $u = \text{const}$ y $v = \text{const}$ en la ecuación de las líneas asintóticas, deducimos que *la red de coordenadas será asintótica si, y sólo si, son iguales a cero los coeficientes L y N de la segunda forma cuadrática.*

Teorema. En un entorno de un punto hiperbólico de la superficie siempre se puede introducir una parametrización tal que las líneas coordenadas sean asintóticas.

Esto se deduce del teorema general del § 3 del capítulo IV puesto que las líneas asintóticas satisfacen la ecuación

$$L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = 0$$

para la cual se cumplen las condiciones del teorema mencionado ($LN - M^2 < 0$).

Sea P un punto arbitrario de la superficie Φ y sean $(du : dv)$ y $(\delta u : \delta v)$ dos direcciones sobre la superficie en el punto P. Las direcciones (d) y (δ) se denominan *conjugadas* si las rectas g_d y g_δ que comprenden estas direcciones son diámetros conjugados de la indicatriz de Dupin en el punto P.

Es decir, para que las direcciones (d) y (δ) sean conjugadas es necesario y suficiente que se cumpla la condición

$$L\,du\,\delta u + M\,(du\,\delta v + dv\,\delta u) + N\,dv\,\delta v = 0.$$

Una comprobación directa permite ver que la condición de conjugación de las direcciones (d) y (δ) admite una denotación compacta

$$dr \cdot \delta n = 0$$

o

$$\delta r \cdot dn = 0.$$

Las direcciones asintóticas son autoconjugadas.

Supongamos que sobre la superficie se tienen dos familias γ'_α y γ''_β de líneas que forman una red en el sentido de que por todo punto de la superficie pasa una línea de cada familia. Entonces, la red de líneas formada por las familias γ'_α y γ''_β se denomina *red conjugada* si en todo punto tienen direcciones conjugadas las líneas pertenecientes a las distintas familias que forman la red.

Si la red de coordenadas es una red conjugada, el coeficiente M de la segunda forma cuadrática de la superficie es igual a cero. Para comprobarlo bastará escribir la condición de conjugación para las direcciones $(du: 0)$ y $(0 : \delta v)$.

En un entorno de todo punto de la superficie que no sea un punto plano se puede introducir una parametrización tal que las líneas coordenadas formen una red conjugada, con la particularidad de que una familia de líneas coordenadas se puede escoger arbitrariamente siempre que las líneas de esta familia no tengan direcciones asintóticas.

§ 3. Direcciones principales sobre la superficie. Líneas de curvatura

La dirección $(du : dv)$ sobre la superficie se denomina *dirección principal* si la curvatura normal de la superficie alcanza en esta dirección su valor extremo. Es decir, se trata de *las direcciones que coinciden con las direcciones de los ejes de la indicatriz de curvatura.*

De aquí se deduce que en el caso general en todo punto de la superficie existen dos direcciones principales. Por coincidir con las direcciones de los ejes de la indicatriz de curvatura, *las direcciones principales son ortogonales y conjugadas* y, por consiguiente, satisfacen las condiciones

$$I(d, \delta) = E\, du\, \delta u + F\,(du\, \delta v + dv\, \delta u) + G\, du\, \delta v = 0$$

(condición de ortogonalidad) y

$$II(d, \delta) = L\, du\, \delta u + M\,(du\, \delta v + dv\, \delta u) + N\, dv\, \delta v = 0$$

(condición de conjugación).

Eliminando δu y δv de estas ecuaciones, obtenemos

$$\begin{vmatrix} E\,du + F\,dv & F\,du + G\,dv \\ L\,du + M\,dv & M\,du + N\,dv \end{vmatrix} = 0.$$

Esta es la condición necesaria y suficiente para que la dirección $(du : dv)$ sea principal. Se puede escribir en otra forma, más simétrica

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -du\,dv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0. \qquad (*)$$

Las direcciones principales no quedan definidas en dos casos: en el caso de un punto plano ya que en él cualquier dirección es principal (pues la curvatura normal es igual a cero en cualquier dirección) y en un caso especial de un punto elíptico en el que la indicatriz de curvatura es una circunferencia (el punto se denomina entonces *umbílico*). En un punto umbílico, al igual que en un punto plano, cualquier dirección es principal. Esto queda reflejado en la condición $(*)$ que determina las direcciones principales. Dicha condición se cumple idénticamente sólo en dos casos: si $L = M = N = 0$ (punto plano) o si los coeficientes de la primera forma cuadrática son proporcionales a los coeficientes de la segunda forma cuadrática (punto umbílico).

Las curvaturas normales de la superficie correspondientes a las direcciones principales se denominan *curvaturas principales*.

Teorema de Rodrigues. Si la dirección (d) *es dirección principal, se tiene*

$$d\boldsymbol{n} = -k\, d\boldsymbol{r},$$

donde k *es la curvatura normal de la superficie en esta dirección. Recíprocamente, si en la dirección* (d)

$$d\boldsymbol{n} = \lambda\, d\boldsymbol{r},$$

entonces (d) *es una dirección principal.*

Demostración. Sea (δ) la otra dirección principal, perpendicular a la primera. El vector $d\boldsymbol{n}$ que es perpendicular a $\boldsymbol{n}$ admite la representación

$$d\boldsymbol{n} = \lambda\, d\boldsymbol{r} + \mu\, \delta\boldsymbol{r}.$$

Multiplicando esta igualdad por $\delta\boldsymbol{r}$ y observando que $d\boldsymbol{n} \cdot \delta\boldsymbol{r} = 0$ debido a la conjugación de las direcciones (d) y (δ) y que $d\boldsymbol{r} \cdot \delta\boldsymbol{r} = 0$ debido a la ortogonalidad de estas direcciones, obtenemos

$$\mu\, \delta\boldsymbol{r}^2 = 0,$$

de donde $\mu = 0$. Es decir, $d\boldsymbol{n} = \lambda\, d\boldsymbol{r}$. Multiplicando esta igualdad por $d\boldsymbol{r}$, obtenemos

$$(d\boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{n}) = \lambda\, d\boldsymbol{r}^2,$$

de donde se deduce que $\lambda = -k$. Hemos demostrado la primera parte del teorema.

Demostremos la afirmación recíproca. Sea (d) una dirección tal que

$$d\boldsymbol{n} = \lambda\, d\boldsymbol{r}.$$

Demostremos que es una dirección principal. Sea (δ) la dirección perpendicular a (d). Entonces, multiplicando la igualdad $d\boldsymbol{n} = \lambda\, d\boldsymbol{r}$ por $\delta\boldsymbol{r}$, obtenemos $d\boldsymbol{n} \cdot \delta\boldsymbol{r} = 0$. Pero esto significa que las direcciones (d) y (δ) son conjugadas. Como son, además, ortogonales, resulta que son principales.

Hemos demostrado el teorema.

Una línea sobre la superficie se denomina *línea de curvatura* si su dirección es en todo punto una dirección principal.

De ello se deduce que

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -du\, dv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0$$

es la ecuación diferencial de las líneas de curvatura.

Si las líneas coordenadas sobre la superficie son líneas de curvatura, los coeficientes F y M de la primera y de la segunda, respectivamente, formas cuadráticas son iguales a cero.

En efecto, $F = 0$ porque la red de coordenadas es ortogonal y $M = 0$ porque la red es conjugada.

Teorema. En un entorno de todo punto P de la superficie que no sea un punto umbílico ni un punto plano, la superficie puede parametrizarse de modo que las líneas coordenadas sean líneas de curvatura.

Efectivamente, la ecuación diferencial de las líneas de curvatura tiene la forma

$$A\,du^2 + 2B\,du\,dv + C\,dv^2 = 0. \qquad (**)$$

Puesto que en todo punto próximo a P existen dos, y sólo dos, direcciones principales, el trinomio

$$A + 2B\xi + C\xi^2$$

tiene dos raíces reales. Por eso, $AC - B^2 < 0$. Según el teorema del § 3 del capítulo IV de aquí se deduce que existe una parametrización para la cual las líneas coordenadas serán curvas integrales de la ecuación $(**)$, es decir, serán líneas de curvatura.

Para terminar, demostremos un teorema que en algunos casos permite hallar con facilidad líneas de curvatura sobre la superficie.

Teorema. Si dos superficies se cortan a lo largo de una curva γ formando ángulo constante y si esta curva es línea de curvatura sobre una de las superficies, también será línea de curvatura sobre la otra.

Demostración. Al derivar sobre la primera superficie a lo largo de la curva γ, tenemos

$$d\boldsymbol{n}_1 = \lambda_1 d\boldsymbol{r}.$$

Para la segunda superficie es

$$d\boldsymbol{n}_2 = \lambda_2\, d\boldsymbol{r} + \mu \boldsymbol{n}_1 + \nu \boldsymbol{n}_2.$$

Multipliquemos esta igualdad escalarmente por $\boldsymbol{n}_1$ y $\boldsymbol{n}_2$. Entonces, tendremos

$$\boldsymbol{n}_1\, d\boldsymbol{n}_2 = \mu(\boldsymbol{n}_1^2) + \nu(\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_2) \text{ y } \boldsymbol{n}_2\, d\boldsymbol{n}_2 = \mu(\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_2) + \nu(\boldsymbol{n}_2^2).$$

Pero $\boldsymbol{n}_2 d\boldsymbol{n}_2 = 0$ y $\boldsymbol{n}_1\, d\boldsymbol{n}_2 = d(\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_2) - \boldsymbol{n}_2\, d\boldsymbol{n}_1 = -\boldsymbol{n}_2\, d\boldsymbol{n}_1 = -\boldsymbol{n}_2\lambda_1\, d\boldsymbol{r} = 0$. Es decir,

$$\mu \boldsymbol{n}_1^2 + \nu(\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_2) = 0 \text{ y } \mu(\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_2) + \nu\boldsymbol{n}_2^2 = 0. \qquad (***)$$

Si las superficies no son tangentes a lo largo de la curva γ, se tiene $n_1^2 n_2^2 - (n_1 n_2)^2 = | n_1 \times n_2 |^2 \neq 0$, y, por consiguiente, las igualdades (***) pueden darse sólo si $\mu = \nu = 0$. Pero entonces para la segunda superficie se tiene $dn_2 = \lambda_2 \, dr$, o sea, γ es línea de curvatura de la segunda superficie.

Si las superficies son tangentes a lo largo de γ, la afirmación del teorema se hace evidente ya que, en virtud del teorema de Rodrígues, si la dirección de la línea γ es principal en una superficie, también será principal en la otra.

Hemos demostrado el teorema.

Corolario. Si la esfera (o el plano) forma un ángulo constante con una superficie cualquiera, la línea de intersección es una línea de curvatura.

Esto resulta de que *toda curva trazada sobre la esfera (o sobre el plano) es una línea de curvatura.*

§ 4. Relación entre las curvaturas principales de una superficie y la curvatura normal en una dirección arbitraria. Curvaturas media y gaussiana de una superficie

Expresemos la curvatura normal de la superficie en una dirección arbitraria a través de las curvaturas normales principales. Para ello consideremos las coordenadas cartesianas rectangulares x, y, y z tomando como plano xy el plano tangente a la superficie en un punto arbitrario O y como eje z la normal a la superficie. Escojamos las direcciones de los ejes x e y de modo que coincidan con las direcciones principales en el punto O.

Sea $z = z(x, y)$ la ecuación de la superficie en un entorno del punto O referida a estas coordenadas. En el punto O se tiene $z_x = 0$ y $z_y = 0$. Por eso, en el punto O se tiene

$$I = dx^2 + dy^2,$$

$$II = r \, dx^2 + 2s \, dx \, dy + t \, dy^2.$$

Puesto que en el punto O las direcciones $(0 : dy)$ y $(\delta x : 0)$ son conjugadas por ser direcciones principales, se tiene

$s = 0$ y, por consiguiente,

$$II = r\,dx^2 + t\,dy^2.$$

De aquí que la curvatura normal en una dirección arbitraria $(dx: dy)$ sea

$$k = \frac{r\,dx^2 + t\,dy^2}{dx^2 + dy^2}.$$

Tomando las direcciones $(0 : dy)$ y $(\delta x : 0)$, vemos que r y t son las curvaturas principales.

Sea ϑ el ángulo que forman una dirección arbitraria $(dx : dy)$ y la dirección principal $(dx : 0)$, sea k_v la curvatura normal en esta dirección y sean k_1 y k_2 las curvaturas principales correspondientes a las direcciones $(dx : 0)$ y $(0 : \delta y)$, respectivamente. Entonces de la expresión (*) para la curvatura normal se obtiene *la fórmula de Euler para la curvatura normal en una dirección arbitraria*:

$$k_v = k_1 \cos^2 \vartheta + k_2 \operatorname{sen}^2 \vartheta.$$

De la fórmula de Euler se deduce que para obtener la curvatura normal en una dirección arbitraria basta conocer las curvaturas principales de la superficie.

Hallemos la expresión para las curvaturas principales en el caso de cualquier representación paramétrica de la superficie.

Sean k_1 y k_2 las curvaturas principales de la superficie; supongamos, para concretar, que $k_1 \geqslant k_2$. En tal caso, como sabemos, k_1 es el máximo y k_2 es el mínimo del cociente de las formas cuadráticas

$$\frac{II}{I} = \frac{L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2}{E\xi^2 + 2F\xi\eta + G\eta^2}.$$

Sean $\bar{\xi}$ y $\bar{\eta}$ los valores de las variables ξ y η para los cuales este cociente alcanza el máximo (sabemos ya que estos valores de ξ y η existen). Entonces, para todos los valores de ξ y η se tiene

$$II - k_1 I \leqslant 0,$$

con la particularidad de que para $\xi = \bar{\xi}$ y $\eta = \bar{\eta}$ se alcanza la igualdad. De ello se deduce que para estos valo-

res es

$$(II - k_1 I)'_{\bar\xi} = 0,$$
$$(II - k_1 I)'_{\bar\eta} = 0,$$

o sea,

$$L\bar\xi + M\bar\eta - k_1 (E\bar\xi + F\bar\eta) = 0,$$
$$M\bar\xi + N\bar\eta - k_1 (F\bar\xi + G\bar\eta) = 0.$$

Eliminando $\bar\xi$ y $\bar\eta$ de estas igualdades, obtenemos la ecuación para k_1

$$\begin{vmatrix} L - k_1 E & M - k_1 F \\ M - k_1 F & N - k_1 G \end{vmatrix} = 0.$$

Realizando razonamientos análogos para k_2, obtenemos la misma ecuación. Es decir, *las curvaturas principales k_1 y k_2 son raíces de la ecuación de segundo grado*

$$\begin{vmatrix} L - kE & M - kF \\ M - kF & N - kG \end{vmatrix} = 0,$$

o sea,

$$k^2 (EG - F^2) - k (LG - 2MF + NE) + (LN - M^2) = 0.$$

Definamos ahora los conceptos de curvaturas media y gaussiana de una superficie. La semisuma de las curvaturas principales de la superficie

$$H = \frac{1}{2} (k_1 + k_2)$$

se denomina *curvatura media* de la superficie.

Las siguientes propiedades justifican el término de «curvatura media».

Si k_v y $k_{v+\frac{\pi}{2}}$ son las curvaturas normales de la superficie en dos direcciones recíprocamente perpendiculares, la semisuma de las mismas es igual a la curvatura media de la superficie.

El valor medio de las curvaturas normales de la superficie en un punto dado de la superficie, o sea, el valor

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k_\vartheta \, d\vartheta,$$

es igual a la curvatura media de la superficie.

Ambas propiedades se obtienen fácilmente de la fórmula de Euler.

El producto de las curvaturas principales de la superficie

$$K = k_1 k_2$$

se denomina curvatura *gaussiana* o *curvatura total* de la superficie.

Hallemos las expresiones de las curvaturas media y gaussiana de la superficie en términos de los coeficientes de la primera y de la segunda formas cuadráticas.

Por cuanto las curvaturas principales k_1 y k_2 de la superficie satisfacen la ecuación

$$k^2 (EG - F^2) - k (LG - 2MF + NE) + (LN - M^2) = 0,$$

en virtud de la propiedad de las raíces de una ecuación de segundo grado tenemos

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = \frac{1}{2}\frac{LG - 2MF + NE}{EG - F^2},$$

$$K = k_1 k_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

En particular, si la superficie viene dada por la ecuación $z = z(x, y)$, se tiene

$$H - \frac{1}{2}\frac{(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$K = \frac{rt - s^2}{(1+p^2+q^2)^2},$$

donde p, q, r, s y t son las designaciones habituales de las derivadas de la función $z(x, y)$.

Notemos que el signo de la curvatura gaussiana se determina por la expresión $LN - M^2$. Por esto, *la curvatura gaussiana es positiva en los puntos elípticos, es negativa en los puntos hiperbólicos y es igual a cero en los puntos parabólicos y en los puntos planos.*

Sea M un conjunto cualquiera de puntos de una superficie. Construyamos a partir de un punto arbitrario O los vectores unitarios de las normales a la superficie en los puntos del conjunto M. Los extremos de estos vecto-

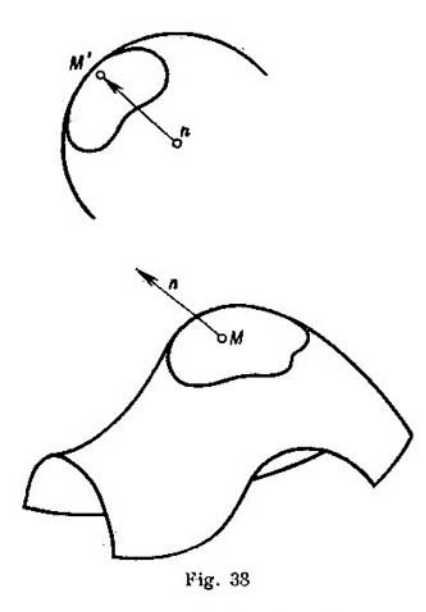


Fig. 38

res forman un conjunto M' sobre la esfera unitaria. Este conjunto se denomina *imagen esférica* del conjunto M (fig. 38).

Existe una relación importante entre el área de la superficie, el área de su imagen esférica y la curvatura gaussiana de la superficie. Esta relación se formula en el teorema siguiente.

Teorema de Gauss. El cociente del área de la imagen esférica de una región sobre la superficie al área de esta región tiende al valor absoluto de la curvatura gaussiana en el punto dado O de la superficie cuando la región tiende a este punto.

Demostraremos este teorema suponiendo que la curvatura gaussiana en el punto O es distinta de cero y que la región G, que tiende al punto O, está limitada por un

número finito de curvas suaves a trozos. Esto se debe a que la imagen esférica de la región G puede no ser una región si la curvatura gaussiana en el punto O es igual a cero. Por eso, para poder analizar el caso general, habría que definir el concepto de área para un conjunto cualquiera.

Sea, pues, O un punto elíptico o hiperbólico de la superficie y sea G una región perteneciente a un entorno suficientemente pequeño del punto O y limitada por un número finito de curvas suaves a trozos.

Parametricemos la superficie en el entorno del punto O de modo que las líneas coordenadas que pasan por el punto O tengan en este punto direcciones principales.

La ecuación

$$\tilde{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{n}(u, v),$$

donde $\boldsymbol{n}(u, v)$ es el vector unitario de la normal a la superficie, representa la parametrización de la esfera unitaria en un enotorno del punto O' correspondiente al punto O de la superficie. Efectivamente, en el punto O' la condición $\boldsymbol{n}_u \times \boldsymbol{n}_v \neq 0$ se cumple de un modo evidente ya que $\boldsymbol{n}_u = -k_1 \boldsymbol{r}_u$ y $\boldsymbol{n}_v = -k_2 \boldsymbol{r}_v$; por continuidad, también se cumple en un entorno de este punto. La imagen esférica G' de la región G representa una región limitada por un número finito de curvas suaves a trozos si la región G pertenece a un entorno suficientomente pequeño del punto O. Su área es

$$\sigma(G') = \iint_G |\boldsymbol{n}_u \times \boldsymbol{n}_v| \, du \, dv.$$

Puesto que el área de la región G es

$$\sigma(G) = \iint_G |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| \, du \, dv,$$

se tiene

$$\frac{\sigma(G')}{\sigma(G)} \to \frac{|\boldsymbol{n}_u \times \boldsymbol{n}_v|(O)}{|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|(O)} = |k_1 k_2|.$$

Hemos demostrado el teorema.

§ 5. Superficies regladas

Una superficie Φ se denomina *superficie reglada elemental* si por todo punto P de esta superficie pasa una recta que tiene común con la superficie un segmento conteniendo el punto P, con la particularidad de que los extremos de este segmento no pertenecen a la superficie.

Ejemplo. Sean $\boldsymbol{a}(u)$ y $\boldsymbol{b}(u)$ dos funciones vectoriales que están definidas en un entorno del punto $u = u_0$ y que satisfacen en este punto las condiciones $\boldsymbol{b}(u_0) \neq 0$ y $\boldsymbol{b}(u_0) \times \boldsymbol{a}'(u_0) \neq 0$. Entonces, para ε suficientemente pequeño, la ecuación vectorial

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}(u) + v\,\boldsymbol{b}(u), \quad |u - u_0| < \varepsilon \text{ y } |v| < \varepsilon, \quad (*)$$

define una superficie reglada elemental.

Efectivamente, para ε suficientemente pequeño se tiene $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \neq 0$, ya que para $u = u_0$ y $v = 0$ es $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v = \boldsymbol{a}'(u_0) \times \boldsymbol{b}(u_0) \neq 0$. De aquí se deduce que siendo ε suficientemente pequeño, la ecuación (*) define efectivamente una superficie. Esta superficie es una superficie reglada elemental; ello se deduce de que por un punto arbitrario (u', v') de esta superficie pasa la recta $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}(u') + t\boldsymbol{b}(u')$ tal que su segmento $|t| < \varepsilon$ pertenece a la superficie y sus extremos no le pertenecen.

Una superficie Φ se denomina *superficie reglada general* si todo punto de la misma tiene un entorno que es una superficie reglada elemental.

Los segmentos rectilíneos sobre la superficie reglada se denominan *generatrices rectilíneas*.

Puesto que por todo punto de una superficie reglada pasa una generatriz rectilínea, resulta que en cada punto de una superficie reglada existe una dirección en la cual es igual a cero la curvatura normal de la superficie. De ello se deduce que *sobre la superficie reglada no puede haber puntos elípticos. La curvatura gaussiana de la superficie reglada es negativa o igual a cero.*

Las generatrices rectilíneas son líneas asintóticas.

Hallemos una representación paramétrica local de una superficie reglada arbitraria, o sea, su representación paramétrica en un entorno suficientemente pequeño de un punto arbitrario P.

Distinguiremos los casos siguientes:

1. El punto P es hiperbólico.

2. Todos los puntos de un entorno suficientemente pequeño del punto P son parabólicos.

3. Todos los puntos de un entorno del punto P son puntos planos.

En el primer caso al menos una familia de líneas asintóticas en un entorno del punto P está formada por rectas.

Efectivamente, o bien todas las líneas asintóticas en el entorno del punto P son rectas o bien existen líneas asintóticas γ tan próximas a P como se quiera que no son rectas. Pero entonces son rectas todas las líneas asintóticas que cortan γ.

Si $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}(u)$ es la ecuación de la línea asintótica γ y $\boldsymbol{b}(u)$ es el vector unitario de la segunda dirección asintótica, entonces la superficie puede ser dada en un entorno del punto P mediante la ecuación

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}(u) + v\boldsymbol{b}(u).$$

Consideremos el segundo caso. En este caso las generatrices rectilíneas son líneas de curvatura. Por todo punto Q próximo a P pasa sólo una generatriz rectilínea. Tracemos sobre la superficie, por el punto P, la curva γ de ecuación $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}(u)$ de modo que su dirección en el punto P no coincida con la dirección de la generatriz. El vector unitario $\boldsymbol{b}(u)$ de la generatriz es una función regular de u. En un entorno del punto P la superficie puede ser dada mediante la ecuación

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}(u) + v\boldsymbol{b}(u).$$

Consideremos ahora el tercer caso. Como todos los puntos próximos a P son puntos planos y como en un punto plano cualquier dirección es principal y la curvatura normal en cualquier dirección es igual a cero, resulta por el teorema de Rodrígues que $d\boldsymbol{n} = 0$ en el entorno del punto P. Por consiguiente, $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}_0 = \text{const}$. Puesto que $\boldsymbol{n}d\boldsymbol{r} = 0$ se tiene $\boldsymbol{n}_0(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) = 0$. Es decir, en el tercer caso un entorno suficientemente pequeño del punto P es una región de un plano. Sean $\boldsymbol{a}_0$ y $\boldsymbol{b}_0$ dos vectores constantes independientes cualesquiera pertenecientes a este plano. Enton-

ces la superficie puede ser dada en el entorno del punto P mediante la ecuación

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}_0 u + \boldsymbol{b}_0 v.$$

Es decir, en todos los casos considerados *la superficie reglada en un entorno suficientemente pequeño de todo punto admite una parametrización de tipo*

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}(u) + v\boldsymbol{b}(u).$$

Estudiemos ahora una clase importante de superficies regladas, las superficies desarrollables.

Una superficie Φ se denomina *superficie desarrollable* si es localmente isométrica al plano, o sea, si para todo punto de esta superficie existe un entorno isométrico a una región del plano.

Resulta *que para que la superficie sea desarrollable es necesario y suficiente que su curvatura gaussiana sea siempre igual a cero* (capítulo VIII §2 y capítulo IX § 6). Es decir, las superficies desarrollables se pueden definir como las superficies de curvatura gaussiana nula.

Toda superficie que sea la envolvente de una familia monoparamétrica de planos es una superficie desarrollable. Efectivamente, en virtud del teorema de Rodrígues, la dirección a lo largo de la generatriz rectilínea es dirección principal. Pero como la curvatura normal en esta dirección es igual a cero, también es igual a cero la curvatura gaussiana.

Estudiemos la estructura de la superficie desarrollable en un entorno de un punto arbitrario P. Distinguiremos dos casos:

1. En el entorno del punto P la curvatura media $H = 0$
2. En el entorno del punto P la curvatura media $H \neq 0$.

En el primer caso son iguales a cero las curvaturas princiales de la superficie en todo punto próximo al punto P. Por consiguiente, todo punto próximo a P es un punto plano. Pero entonces, según hemos demostrado anteriormente, el punto P tiene un entorno que es una región de un plano.

Consideremos el segundo caso. Tomemos sobre la superficie la red de coordenadas formada por líneas de

curvatura. Supongamos que las líneas u (o sea, v = const) son aquellas líneas de curvatura a lo largo de las cuales es igual a cero la curvatura normal de la superficie.

Según el teorema de Rodrígues, se tiene $\boldsymbol{n}_u = 0$ ya que la curvatura normal en la dirección de la línea u es igual a cero. De ello se deduce que las normales a la superficie a lo largo de la línea u son paralelas.

Demostremos que las líneas u son rectas. Tenemos $\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{n} = 0$. De aquí obtenemos que $(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)\,\boldsymbol{n} = 0$ a lo largo de la línea u. Es decir, la línea u es plana. Además, el vector $\boldsymbol{n}_v \neq 0$ tiene la dirección de la normal a la línea u. Pero como $(\boldsymbol{n}_v)_u = (\boldsymbol{n}_u)_v = 0$, las normales a la línea u son paralelas. Esto puede ocurrir sólo si la línea u es una recta.

Es decir, en ambos casos *la superficie desarrollable es reglada y el plano tangente no varía a lo largo de las generatrices rectilíneas*. De este modo, en el segundo de los casos considerados el plano tangente depende sólo de un parámetero (v) y, por consiguiente, *la superficie desarrollable es la envolvente de una familia monoparamétrica de planos.*

§ 6. Superficies de revolución

Una superficie F se denomina *superficie de revolución* si se obtiene al girar una curva alrededor de un eje. Las líneas de intersección de la superficie con los planos que pasan por el eje de revolución se denominan *meridianos* y las líneas de intersección con los planos perpendiculares al eje de revolución se denominan *paralelos* (fig. 39).

Obtengamos la ecuación de la superficie de revolución que resulta al girar alrededor del eje z la curva γ

$$x = \varphi(u), \qquad z = \psi(u)$$

perteneciente al plano xz. Por efecto del giro de ángulo v, el punto $(\varphi(u), 0, \psi(u))$ de la curva γ se transforma en el punto

$$(\varphi(u)\cos v,\ \varphi(u)\,\mathrm{sen}\,v,\ \psi(u)).$$

De aquí que la ecuación de la superficie de revolución sea

$$x = \varphi(u)\cos v,\ y = \varphi(u)\,\mathrm{sen}\,v,\ z = \psi(u).$$

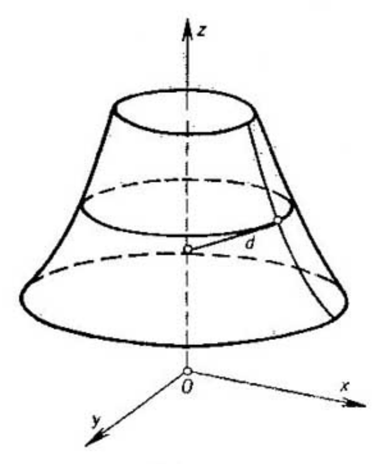


Fig. 39

Las líneas v = const son los meridianos de la superficie y las líneas u = const son los paralelos.

La primera forma cuadrática de la superficie es

$$I = (\varphi'^2 + \psi'^2)\, du^2 + \varphi^2\, dv^2.$$

Como vemos, *los meridianos y los paralelos de la superficie de revolución forman una red ortogonal* ($F = 0$). Desde luego, este resultado es geométricamente evidente.

La segunda forma cuadrática de la superficie es

$$II = \frac{\psi''\varphi' - \psi'\varphi''}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}}\, du^2 + \frac{\psi'\varphi}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}}\, dv^2.$$

Como vemos, los paralelos y los meridianos forman una red conjugada ($M = 0$). Puesto que la red es, además, ortogonal, *los paralelos y los meridianos son líneas de curvatura.* Geométricamente esto también queda claro pues los planos que pasan por el eje y los planos perpendiculares al eje cortan la superficie de revolución formando ángulos constantes y, según el corolario del teorema del § 3 del

capítulo VII, las líneas de intersección (o sea, los meridianos y los paralelos) deben ser líneas de curvatura.

Es importante señalar que los coeficientes de la primera y de la segunda formas cuadráticas dependen sólo de u.

Hallemos las curvaturas principales de la superficie de revolución. Sean k_1 la curvatura del meridiano, sea k_2 la curvatura del paralelo y ϑ el ángulo que forma la tangente al meridiano con el eje de la superficie. Puesto que el plano del meridiano corta la superficie en ángulo recto, *la curvatura normal de la superficie en la dirección del meridiano es igual a la curvatura del meridiano*, o sea, es igual a k_1. Para la curvatura de la superificie en la dirección del paralelo obtenemos, por el teorema de Meusnier, el valor $k_2 \cos \vartheta$. La magnitud $k_2 \cos \vartheta$ tiene un sentido geométrico sencillo; a saber, *si designamos por d la longitud del segmento de la normal a la superficie comprendido entre el punto de la superficie y el eje* (fig. 39), *se tiene*

$$k_2 \cos \vartheta = \frac{1}{d}.$$

Para terminar este parágrafo *veamos un ejemplo de una superficie de revolución de curvatura gaussiana negativa constante.*

Supongamos que el eje de revolución es el eje z. La ecuación del meridiano de la superficie en el plano xz es

$$x = x(z).$$

La curvatura normal de la superficie en la dirección del meridiano es

$$k_1 = \frac{x''}{(1+x'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

La curvatura normal de la superficie en la dirección del paralelo es

$$k_2 = -\frac{1}{x(1+x'^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

De aquí que la curvatura gaussiana de la superficie sea

$$K = \frac{-x''}{x(1+x'^2)^2}.$$

Multiplicando esta ecuación por xx', obtenemos

$$Kxx' = \frac{-x'x''}{(1+x'^2)^2}.$$

Integrando, encontramos

$$Kx^2 + c = \frac{1}{1+x'^2},$$

donde c es una constante arbitraria. Para poder integrar en funciones elementales, pongamos $c = 1$. Entonces,

$$Kx^2 = \frac{-x'^2}{1+x'^2}.$$

Pongamos $x' = \operatorname{tg} \vartheta$. Tenemos

$$Kx^2 = -\operatorname{sen}^2 \vartheta \quad \text{y} \quad x = \frac{1}{\sqrt{-K}} \operatorname{sen} \vartheta.$$

Luego,

$$\frac{dz}{dx} = \operatorname{ctg} \vartheta \text{ y } dz = \frac{1}{\sqrt{-K}} \frac{\cos^2 \vartheta}{\operatorname{sen} \vartheta} d\vartheta = \\ = \frac{1}{\sqrt{-K}} \left(\frac{1}{\operatorname{sen} \vartheta} - \operatorname{sen} \vartheta\right) d\vartheta,$$

de donde

$$z = \frac{1}{\sqrt{-K}} \left(\cos \vartheta + \ln \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}\right) + c.$$

La constante c no tiene importancia y corresponde a un desplazamiento del meridiano paralelamente al eje.

La ecuación del meridiano es

$$x = \frac{1}{\sqrt{-K}} \operatorname{sen} \vartheta, \qquad z = \frac{1}{\sqrt{-K}} \left(\cos \vartheta + \ln \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}\right).$$

Esta curva se denomina *tractriz*. Su propiedad distintiva consiste en que tiene longitud constante el segmento de la tangente comprendido entre el punto de tangencia y el eje z. De modo que la superficie que hemos encontrado se obtiene girando la tractriz. Esta superficie se denomina *seudoesfera*.

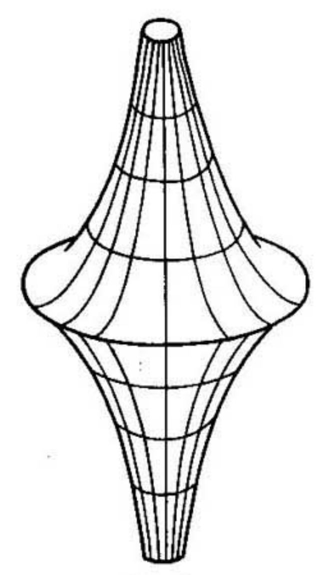


Fig. 40

Sus ecuaciones son

$$x = \frac{1}{\sqrt{-K}} \operatorname{sen} \vartheta \cos \varphi,$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{-K}} \operatorname{sen} \vartheta \operatorname{sen} \varphi,$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{-K}} \left(\cos \vartheta + \ln \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \right).$$

La fig. 40 ofrece una idea de la forma de la seudoesfera.

EJERCICIOS PARA EL CAPITULO VII

1. Calcular la segunda forma cuadrática para la superficie helicoidal

$$x = u \cos v, \quad y = u \operatorname{sen} v, \quad z = v,$$

Respuesta. $\frac{-2du\,dv}{\sqrt{u^2+1}}$.

2. Hallar la curvatura normal del paraboloide $z=\frac{1}{2}(ax^2+$ $+by^2)$ en el punto (0, 0) en la dirección $(dx : dy)$.

Respuesta. $k=\frac{adx^2+bdy^2}{dx^2+dy^2}$.

3. Mostrar que cualquiera que sea la parametrización del plano la segunda forma cuadrática es idénticamente igual a cero y que cualquiera que sea la parametrización de la esfera la segunda forma cuadrática es proporcional a la primera.

4. Hallar las líneas asintóticas de la superficie

$$z=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}.$$

Respuesta. $x=c_1y$, $\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}=c_2$.

5. Determinar las líneas asintóticas del catenoide

$$x=\operatorname{ch} u\cos v,\ y=\operatorname{ch} u \operatorname{sen} v,\ z=u.$$

Respuesta. $u+v=\text{const}$ y $u-v=\text{const}$.

6. Mostrar que sobre el helicoide una familia de líneas asintóticas está formada por rectas y la otra, por hélices.

7. Sobre la superficie

$$ax^2+by^2+cz^2=1$$

hallar la familia de líneas conjugada de la familia $y=\text{const}$.

Respuesta. $1-by^2=\lambda x^2$, donde λ es una constante arbitraria.

8. Mostrar que las curvas de traslación ($u=\text{const}$ y $v=$ $=\text{const}$) forman una red conjugada sobre la superficie de traslación

$$\mathbf{r}=\mathbf{U}(u)+\mathbf{V}(v).$$

9. Determinar las curvaturas principales del paraboloide

$$z=a(x^2+y^2) \text{ en el punto } (0,\ 0,\ 0).$$

Respuesta. $2a$ y $2a$.

10. Determinar las líneas de curvatura sobre el helicoide

$$x=u\cos v,\ y=u\operatorname{sen} v,\ z=cv.$$

Respuesta.

$$\ln(u+\sqrt{u^2+c^2})-v=\text{const},$$
$$\ln(u+\sqrt{u^2+c^2})+v=\text{const}.$$

11. Hallar las líneas de curvatura del paraboloide

$$z=axy.$$

Respuesta.

$$\ln(ay+\sqrt{1+a^2y^2})\pm\ln(ax+\sqrt{1+a^2x^2})=\text{const}.$$

12. Hallar las curvaturas media y gaussiana del paraboloide $z = axy$ en el punto $x = y = 0$.
Respuesta. $K = -a^2$, $H = 0$.
13. Mostrar que la curvatura media del helicoide es igual a cero.
14. Mostrar que la curvatura media del catenoide

$$z = a \operatorname{Arch} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}$$

es igual a cero.
15. Mostrar que la red asintótica es ortogonal si la curvatura media de la superficie es igual a cero.

PROBLEMAS Y TEOREMAS PARA EL CAPITULO VII

1. Sean $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ una superficie arbitraria, (u_k, v_k) una sucesión de puntos convergente al punto (u_0, v_0) y $(a:b)$ una dirección en el punto (u_0, v_0) en la que es distinta de cero la curvatura normal de la superficie.
Mostrar que si

$$\frac{u_k - u_0}{v_k - v_0} \to \frac{a}{b}$$

cuando $k \to \infty$, la dirección de la recta de intersección de los planos tangentes a la superficie en los puntos (u_0, v_0) y (u_k, v_k) converge a la dirección conjugada de $(a:b)$.
2. Demostrar que por efecto de una aplicación proyectiva (afín, en particular) de una superficie toda red conjugada se transforma en una red conjugada y toda red asintótica se transforma en una red asintótica.
3. Demostrar que forman una red conjugada las secciones de la superficie correspondientes a un haz de planos que pasan por una recta arbitraria g y las líneas de tangencia de esta superficie con los conos circunscritos a ella que tienen sus vértices en la recta g (*teorema de Koenigs*).
4. Demostrar que las curvas de traslación sobre la superficie de traslación

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{U}(u) + \boldsymbol{V}(v)$$

(o sea, las curvas $u = \text{const}$ y $v = \text{const}$) forman una red conjugada.
5. Demostrar que sobre las superficies de Petersón

$$\boldsymbol{r} = \frac{\overline{\boldsymbol{U}}(u) + \overline{\boldsymbol{V}}(v)}{U(u) + V(v)},$$

donde $\overline{\boldsymbol{U}}$ y $\overline{\boldsymbol{V}}$ son unas funciones vectoriales y U y V son unas funciones escalares de los argumentos indicados, las familias $u =$ $= \text{const}$ y $v = \text{const}$ forman una red conjugada.
6. Demostrar que la superficie es una esfera o una región de una esfera si todo punto de la misma es umbílico.

7. Hallar los puntos umbílicos del elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

8. Demostrar que si las líneas asintóticas de diferentes familias tienen en el punto común curvaturas distintas de cero, entonces sus torsiones son iguales en valor absoluto pero tienen signos opuestos.

El valor absoluto de la torsión es igual al valor absoluto de la curvatura gaussiana de la superficie en el punto dado (*teorema de Beltrami y Enneper*).

9. Sea $\boldsymbol{r}(u, v, w)$ una función vectorial de los argumentos u, v y w. Demostrar que siendo

$$r_u r_v = r_v r_w = r_w r_u = 0$$

es

$$r_{uv} r_w = r_{vw} r_u = r_{wu} r_v = 0.$$

10. Sean dadas tres familias de superficies $\varphi(x, y, z) = \text{const}$, $\psi(x, y, z) = \text{const}$ y $\chi(x, y, z) = \text{const}$, con la particularidad de que el jacobiano

$$\frac{D(\varphi, \psi, \chi)}{D(x, y, z)} \neq 0.$$

Se dice que estas familias forman un sistema *triortogonal* de superficies si cualesquiera dos superficies de diferentes familias se cortan formando ángulo recto.

Demostrar que las superficies de distintas familias de un sistema triortogonal se cortan a lo largo de líneas de curvatura.

11. Hallar las líneas de curvatura sobre la superficie de segundo orden

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 1$$

incluyéndola en un sistema triortogonal de superficies confocales de segundo orden.

12. Una superficie Φ se denomina *paralela* a la superficie F si es el lugar geométrico de los extremos de los segmentos de longitud constante llevados sobre las normales a la superficie F. Consideremos como puntos correspondientes de las superficies F y Φ los extremos de los segmentos que se mencionan en la definición.

Demostrar que:

1) los planos tangentes en los puntos correspondientes de las superficies F y Φ son paralelos;

2) la propiedad de paralelismo es recíproca (o sea, si Φ es paralela a F, también F es paralela a Φ);

3) las líneas de curvatura de la superficie F corresponden a las líneas de curvatura de la superficie Φ.

13. Si el punto P de la superficie F no es punto umbílico ni punto plano, entonces en un entorno del punto P las superficies paralelas a F y las superficies desarrollables formadas por las nor-

males a la superficie F a lo largo de las líneas de curvatura forman un sistema triortogonal de superficies. Demostrar esta afirmación.

14. Demostrar que por efecto de la inversión las líneas de curvatura de la superficie dada corresponden a las líneas de curvatura de la superficie transformada.

15. Demostrar que por efecto de una aplicación conforme del espacio sobre sí mismo la esfera se transforma en una esfera o en el plano. Basándose en ello, demostrar a su vez que toda aplicación conforme es el resultado de transformaciones de semejanza, de movimiento, de reflexión especular y de inversión.

16. Expresar las curvaturas media y gaussiana de la superficie paralela en términos de las curvaturas media y gaussiana de la superficie dada y de la distancia entre las superficies.

17. Supongamos que la superficie F

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{f}(u, v)$$

es deformada de modo que en el momento t se transforma en la superficie F_t

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{f}(u, v) + t\lambda(u, v)\,\boldsymbol{n}.$$

Demostrar que para valores pequeños de t la variación del área de la superficie, determinada por la deformación, con precisión de hasta términos de orden t es igual a

$$2t \int_F \lambda H \, d\sigma,$$

donde H es la curvatura media de la superficie F y $d\sigma$ es el elemento del área de esta superficie.

18. Una superficie F se denomina *área mínima* si para todo punto P de la misma existe un entorno ω limitado por una curva simple γ tal que cualquier otra superficie limitada por γ tenga un área no menor que el entorno ω de la superficie F. Demostrar que la curvatura media de toda superficie de área mínima es igual a cero.

19. Demostrar que la aplicación esférica de una superficie de área mínima es conforme en un entorno de todo punto que no sea un punto plano.

20. Demostrar que, sobre una superficie de área mínima, el área de una región G limitada por una curva γ es igual a

$$\sigma = \frac{1}{2} \int_\gamma (\boldsymbol{r}, d\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})$$

(*fórmula de Schwarz*).

21. Demostrar que toda superficie de área mínima que sea reglada es un plano o un helicoide.

22. Demostrar que toda superficie de área mínima que sea una superficie de revolución es un plano o un catenoide.

23. Hallar en cuadraturas todas las superficies de revolución que tengan curvatura gaussiana constante.

CAPITULO VIII

ECUACIONES FUNDAMENTALES DE LA TEORIA DE SUPERFICIES

En los dos capítulos anteriores hemos tocado varios problemas de la teoría de superficies para cuya solución se requiere sólo conocer la primera y la segunda formas cuadráticas de la superficie.

Es natural preguntarse: ¿hasta qué grado la primera y la segunda formas cuadráticas determinan la superficie y qué condiciones deben cumplir las formas cuadráticas

$$Edu^2 + 2F\,dudv + Gdv^2 \quad \text{y} \quad Ldu^2 + 2M\,dudv + Ndv^2$$

a fin de que exista una superficie para la cual estas formas cuadráticas sean su primera y segunda, respectivamente, formas cuadráticas?

Responderemos a esta pregunta con el teorema de Bonnet en el último parágrafo de este capítulo.

§ 1. Fórmulas de derivación

Las fórmulas de derivación para las superficies representan un análogo de las fórmulas de Frenet para las curvas. Expresan las derivadas de los vectores $\boldsymbol{r}_u$, $\boldsymbol{r}_v$ y $\boldsymbol{n}$ en términos de estos vectores y los coeficientes de la primera y de la segunda formas cuadráticas de la superficie. Obtengamos estas fórmulas.

Puesto que los vetores $\boldsymbol{r}_u$, $\boldsymbol{r}_v$ y $\boldsymbol{n}$ no se encuentran en un mismo plano, todo vector puede ser representado como una combinación lineal de los vectores $\boldsymbol{r}_u$, $\boldsymbol{r}_v$ y $\boldsymbol{n}$. En particular,

$$\boldsymbol{r}_{uu} = \Gamma^1_{11}\boldsymbol{r}_u + \Gamma^2_{11}\boldsymbol{r}_v + \lambda_{11}\boldsymbol{n},$$
$$\boldsymbol{r}_{uv} = \Gamma^1_{12}\boldsymbol{r}_u + \Gamma^2_{12}\boldsymbol{r}_v + \lambda_{12}\boldsymbol{n},$$
$$\boldsymbol{r}_{vv} = \Gamma^1_{22}\boldsymbol{r}_u + \Gamma^2_{22}\boldsymbol{r}_v + \lambda_{22}\boldsymbol{n},$$
$$\boldsymbol{n}_u = \alpha_{11}\boldsymbol{r}_u + \alpha_{12}\boldsymbol{r}_v + \alpha_{10}\boldsymbol{n},$$
$$\boldsymbol{n}_v = \alpha_{21}\boldsymbol{r}_u + \alpha_{22}\boldsymbol{r}_v + \alpha_{20}\boldsymbol{n}.$$

Mostremos que los coeficientes Γ^k_{ij}, λ_{ij} y α_{ij} se expresan efectivamente en términos de los coeficientes de la primera y de la segunda formas cuadráticas de la superficie.

Observemos, ante todo, que los coeficientes α_{10} y α_{20} son iguales a cero. Para ello bastará multiplicar escalarmente por $\boldsymbol{n}$ las dos últimas igualdades. Tendremos

$$\boldsymbol{n}_u \boldsymbol{n} = \alpha_{10} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{n}_v \boldsymbol{n} = \alpha_{20}.$$

Pero

$$\boldsymbol{n}_u \boldsymbol{n} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{n}^2)_u = 0 \quad \text{y} \quad \boldsymbol{n}_v \boldsymbol{n} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{n}^2)_v = 0.$$

Para hallar las expresiones de α_{11} y α_{12}, multipliquemos la igualdad

$$\boldsymbol{n}_u = \alpha_{11}\boldsymbol{r}_u + \alpha_{12}\boldsymbol{r}_v$$

escalarmente por $\boldsymbol{r}_u$ y por $\boldsymbol{r}_v$. Tendremos

$$-L = \alpha_{11}E + \alpha_{12}F,$$
$$-M = \alpha_{11}F + \alpha_{12}G,$$

de donde

$$\alpha_{11} = \frac{-LG + MF}{EG - F^2} \quad \text{y} \quad \alpha_{12} = \frac{LF - ME}{EG - F^2}.$$

De un modo análogo se obtienen α_{21} y α_{22}:

$$\alpha_{21} = \frac{NF - MG}{EG - F^2} \quad \text{y} \quad \alpha_{22} = \frac{-NE + MF}{EG - F^2}.$$

Para hallar los coeficientes λ_{11}, λ_{12} y λ_{22}, multipliquemos por $\boldsymbol{n}$ las tres primeras fórmulas. Obtendremos

$$\lambda_{11} = L, \quad \lambda_{12} = M \quad \text{y} \quad \lambda_{22} = N.$$

Para hallar los coeficientes Γ_{ij}^k, multipliquemos las tres primeras igualdades por $\boldsymbol{r}_u$ y por $\boldsymbol{r}_v$. Obtendremos así seis relaciones para los coeficientes Γ_{ij}^k:

$$\Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \frac{1}{2} E_u,$$
$$\Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = F_u - \frac{1}{2} E_v,$$
$$\Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = \frac{1}{2} E_v,$$
$$\Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G = \frac{1}{2} G_u,$$
$$\Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F = F_v - \frac{1}{2} G_u,$$
$$\Gamma_{22}^2 F + \Gamma_{22}^2 G = \frac{1}{2} G_v.$$

De estas seis ecuaciones pueden determinarse los seis coeficientes Γ_{ij}^{h}. No daremos las fórmulas para los coeficientes Γ_{ij}^{h}; señalemos sólo que, a diferencia de los demás coeficientes, éstos *se expresan exclusivamente en términos de los coeficientes de la primera forma cuadrática y de sus derivadas.*

Es decir, hemos demostrado que las derivadas de los vectores $\boldsymbol{r}_u$, $\boldsymbol{r}_v$ y $\boldsymbol{n}$ se expresan efectivamente a través de los vectores $\boldsymbol{r}_u$, $\boldsymbol{r}_v$ y $\boldsymbol{n}$ con coeficientes que dependen sólo de los coeficientes de la primera y de la segunda formas cuadráticas de la superficie.

Para terminar, hallemos los coeficientes Γ_{ij}^{h} en el caso en que la primera forma cuadrática de la superficie es

$$I = du^2 + G dv^2.$$

Tomando $E = 1$ y $F = 0$ en las ecuaciones para Γ_{ij}^{h}, obtenemos

$$\Gamma_{11}^{1} = 0, \qquad \Gamma_{11}^{2} = 0,$$
$$\Gamma_{12}^{1} = 0, \qquad \Gamma_{12}^{2} = \frac{1}{2}\frac{G_u}{G},$$
$$\Gamma_{22}^{1} = -\frac{1}{2}G_u, \qquad \Gamma_{22}^{2} = \frac{1}{2}\frac{G_v}{G}.$$

§ 2. Fórmulas de Gauss-Petersón-Codazzi

La primera y la segunda formas cuadráticas de la superficie no son independientes. La relación entre los coeficientes de estas formas puede ser obtenida del modo siguiente.

Tenemos las igualdades evidentes

$$(\boldsymbol{r}_{uu})_v - (\boldsymbol{r}_{uv})_u = 0, \quad (\boldsymbol{r}_{vv})_u - (\boldsymbol{r}_{uv})_v = 0$$
$$\text{y } (\boldsymbol{n}_u)_v - (\boldsymbol{n}_v)_u = 0.$$

Si en estas igualdades sustituimos las expresiones que figuran entre paréntesis por las fórmulas de derivación, y, después de derivarlas, de nuevo realizamos esta susti-

tución, obtendremos tres igualdades vectoriales de tipo

$$A_1\boldsymbol{r}_u + B_1\boldsymbol{r}_v + C_1\boldsymbol{n} = 0,$$
$$A_2\boldsymbol{r}_u + B_2\boldsymbol{r}_v + C_2\boldsymbol{n} = 0,$$
$$A_3\boldsymbol{r}_u + B_3\boldsymbol{r}_v + C_3\boldsymbol{n} = 0,$$

donde $A_1, A_2, \ldots, C_3$ son expresiones que, de modo bien determinado, se obtienen de los coeficientes de la primera y de la segunda formas cuadráticas de la superficie y de sus derivadas. De estas tres relaciones vectoriales se deducen nueve relaciones escalares:

$$A_1 = 0, \quad B_1 = 0, \quad C_1 = 0,$$
$$A_2 = 0, \quad B_2 = 0, \quad C_2 = 0,$$
$$A_3 = 0, \quad B_3 = 0, \quad C_3 = 0.$$

Hallemos, por ejemplo, la relación $B_1 = 0$. B_1 representa el coeficiente de $\boldsymbol{r}_v$ en la expresión $\omega = (\boldsymbol{r}_{uu})_v - (\boldsymbol{r}_{uv})_u$ después de sustituir las derivadas de los vectores $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{r}_u$ y $\boldsymbol{r}_v$ de acuerdo con las fórmulas de derivación. Tenemos

$$\omega = (\Gamma^1_{11}\boldsymbol{r}_u + \Gamma^2_{11}\boldsymbol{r}_v + L\boldsymbol{n})_v - (\Gamma^1_{12}\boldsymbol{r}_u + \Gamma^2_{12}\boldsymbol{r}_v + M\boldsymbol{n})_u =$$
$$= \{(\Gamma^2_{11})_v\,\boldsymbol{r}_v + \Gamma^1_{11}\boldsymbol{r}_{uv} + \Gamma^2_{11}\boldsymbol{r}_{vv} + L\boldsymbol{n}_v\} -$$
$$- \{(\Gamma^2_{12})_u\,\boldsymbol{r}_v + \Gamma^1_{12}\boldsymbol{r}_{uu} + \Gamma^2_{12}\boldsymbol{r}_{uv} + M\boldsymbol{n}_u\} + \{\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{n}\},$$

donde $\{\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{n}\}$ contiene sólo los vectores $\boldsymbol{r}_u$ y $\boldsymbol{n}$. Sustituyendo los vectores $\boldsymbol{r}_{uu}$, $\boldsymbol{r}_{uv}$, $\boldsymbol{r}_{vv}$, $\boldsymbol{n}_u$ y $\boldsymbol{n}_v$ de acuerdo con las fórmulas de derivación, obtenemos

$$\omega = \Big\{(\Gamma^2_{11})_v + \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} + \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22} - (\Gamma^2_{12})_u - \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11} - \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12} -$$
$$- E\,\frac{LN - M^2}{EG - F^2}\Big\}\,\boldsymbol{r}_v + \{\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{n}\}.$$

De este modo, la relación $B_1 = 0$ tiene la forma

$$\frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{1}{E}\,\{(\Gamma^2_{11})_v + \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} + \ldots - \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12}\}.$$

De esta relación se obtienen importantes corolarios:

1. *La curvatura gaussiana de la superficie se expresa sólo en términos de los coeficientes de la primera forma cuadrática y de sus derivadas (teorema de Gauss).*

2. Puesto que las superficies isométricas, adecuadamente parametrizadas, tienen iguales las primeras formas cuadráticas, resulta que *en los puntos correspondientes de las superficies isométricas son iguales las curvaturas gaussianas.*

3. Puesto que las superficies desarrollables son localmente isométricas al plano, *la curvatura gaussiana de las superficies desarrollables es igual a cero.*

Resulta que entre las nueve relaciones $A_1 = 0, \ldots, C_3 = 0$ hay sólo tres distintas. Una de ellas, la que hemos encontrado, fue obtenida por Gauss. Las otras dos fueron obtenidas primero por Petersón y más tarde por Mainardi y Codazzi.

Estas tres relaciones se pueden escribir en la forma siguiente:

$$\frac{LN-M^2}{EG-F^2} = -\frac{1}{4(EG-F^2)^2}\begin{vmatrix} E & E_u & E_v \\ F & F_u & F_v \\ G & G_u & G_v \end{vmatrix} -$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{EG-F^2}}\left\{\left(\frac{E_v-F_u}{\sqrt{EG-F^2}}\right)_v-\left(\frac{F_v-G_u}{\sqrt{EG-F^2}}\right)_u\right\}$$

(*fórmula de Gauss*);

$$(EG-2FF+GE)(L_v-M_u)-$$

$$-(EN-2FM+GL)(E_v-F_u)+\begin{vmatrix} E & E_u & L \\ F & F_u & M \\ G & G_u & N \end{vmatrix}=0,$$

$$(EG-2FF+GE)(M_v-N_u)-$$

$$-(EN-2FM+GL)(F_v-G_u)+\begin{vmatrix} E & E_v & L \\ F & F_v & M \\ G & G_v & N \end{vmatrix}=0$$

(*fórmulas de Petersón—Codazzi*).

§ 3. Existencia y unicidad de la superficie con la primera y la segunda formas cuadráticas dadas

Tiene lugar el teorema siguiente.

Teorema de Bonnet. *Sean*

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$
$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

dos formas cuadráticas cualesquiera siendo definida positiva la primera. Supongamos que los coeficientes de estas formas satisfacen las condiciones de Gauss-Petersón-Codazzi. Entonces, existe y es única, salvo su posición en el espacio, la superficie para la cual estas formas son su primera y segunda, respectivamente, formas cuadráticas.

Demostración. Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales respecto a las funciones vectoriales ξ, η y ζ:

$$\xi_u = \Gamma_{11}^1\xi + \Gamma_{11}^2\eta + L\zeta,$$
$$\xi_v = \Gamma_{12}^1\xi + \Gamma_{12}^2\eta + M\zeta,$$
$$\eta_u = \Gamma_{12}^1\xi + \Gamma_{12}^2\eta + M\zeta,$$
$$\eta_v = \Gamma_{22}^1\xi + \Gamma_{22}^2\eta + N\zeta,$$
$$\zeta_u = \alpha_{11}\xi + \alpha_{12}\eta,$$
$$\zeta_v = \alpha_{21}\xi + \alpha_{22}\eta,$$

donde los coeficientes Γ_{ij}^k y α_{ij} se expresan de un modo determinado a través de los coeficientes de las formas cuadráticas dadas.

Como se sabe de la teoría de ecuaciones diferenciales, este sistema tiene solución única para los valores iniciales dados (los valores de ξ, η y ζ en un punto (u_0, v_0)) si se cumplen las condiciones de integrabilidad, o sea, si las igualdades

$$(\Gamma_{11}^1\xi + \Gamma_{11}^2\eta + L\zeta)_v - (\Gamma_{12}^1\xi + \Gamma_{12}^2\eta + M\zeta)_u = 0,$$
$$(\Gamma_{12}^1\xi + \Gamma_{12}^2\eta + M\zeta)_v - (\Gamma_{22}^1\xi + \Gamma_{22}^2\eta + N\zeta)_u = 0,$$
$$(\alpha_{11}\xi + \alpha_{12}\eta)_v - (\alpha_{21}\xi + \alpha_{22}\eta)_u = 0$$

se cumplen idénticamente en virtud de las ecuaciones del sistema. De este modo, las condiciones de integrabilidad se reducen a las condicones de Gauss-Petersón—Codazzi.

Como las condiciones de Gauss—Petersón—Codazzi. se cumplen para las formas cuadráticas dadas, resulta que para el sistema considerado de ecuaciones diferenciales se cumplen las condiciones de integrabilidad.

Sean ξ_0, η_0, y ζ_0 tres vectores que satisfacen las condiciones

$$\xi_0^2 = E(u_0, v_0), \quad \xi_0\eta_0 = F(u_0, v_0), \quad \eta_0^2 = G(u_0, v_0),$$
$$\xi_0\zeta_0 = 0, \quad \eta_0\zeta_0 = 0, \quad \zeta_0^2 = 1.$$

Sean ξ, η y ζ la solución de nuestro sistema que satisface las condiciones iniciales $\xi(u_0, v_0) = \xi_0$, $\eta(u_0, v_0) = \eta_0$ y $\xi(u_0, v_0) = \zeta_0$.

Puesto que $\xi_v = \eta_u$, existe una función vectorial $\boldsymbol{r}(u, v)$ para la cual $\boldsymbol{r}_u = \xi$ y $\boldsymbol{r}_v = \eta$. Mostremos que en un entorno del punto (u_0, v_0) la superficie definida por la ecuación vectorial $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ tiene como primera forma cuadrática

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

y como segunda forma cuadrática

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2.$$

Expresemos las derivadas de las seis magnitudes ξ^2, η^2, ζ^2, $\xi\eta$, $\eta\zeta$ y $\zeta\xi$ respecto a u y v mediante estas mismas magnitudes empleando las ecuaciones de nuestro sistema. Obtendremos así doce igualdades

$$\left.\begin{array}{l} (\xi^2)_u = R_1(\xi^2, \eta^2, \ldots), \\ (\xi^2)_v = R_2(\xi^2, \eta^2, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\zeta\xi)_v = R_{12}(\xi^2, \eta^2, \ldots), \end{array}\right\} \qquad (*)$$

donde R_1, R_2, ..., R_{12} son unas expresiones lineales y homogéneas respecto a ξ^2, η^2, ..., $\zeta\xi$.

Podemos considerar las doce igualdades (*) como un sistema de ecuaciones diferenciales para ξ^2, η^2, ..., $\zeta\xi$. Este sistema se satisface si en lugar de ξ^2, η^2, ..., $\zeta\xi$ se toma E, G, ..., 0, respectivamente, como puede comprobarse directamente. Ambas soluciones tienen los mismos valores iniciales (los valores en el punto (u_0, v_0)). En virtud de la unicidad de la solución, de ello se deduce que

$$\xi^2 = E,\ \eta^2 = G,\ \xi\eta = F,\ \xi\zeta = 0,\ \xi\eta = 0,\ \zeta^2 = 1.$$

Puesto que $\boldsymbol{r}_u = \xi$ y $\boldsymbol{r}_v = \eta$, se tiene

$$\boldsymbol{r}_u^2 = \xi^2 = E, \quad \boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v = \xi\eta = F \quad \text{y} \quad \boldsymbol{r}_v^2 = \eta^2 = G.$$

Es decir, la superficie que hemos construido tiene como primera forma cuadrática

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2.$$

Adémas, puesto que $\xi\zeta = \eta\zeta = 0$ y $\zeta^2 = 1$, resulta que ζ es el vector unitario de la normal a la superficie construida y, por consiguiente, los coeficientes de la segunda forma cuadrática de la superficie $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ son iguales a

$$\xi_u\zeta,\ \xi_v\zeta \text{ y } \eta_v\zeta.$$

Teniendo en cuenta las expresiones de las derivadas ξ_u, ξ_v y η_v en términos de ξ, η y ζ, así como las relaciones $\zeta\xi = 0$, $\eta\zeta = 0$ y $\zeta^2 = 1$, encontramos

$$\xi_u\zeta = L,\ \xi_v\zeta = M \text{ y } \eta_v\zeta = N.$$

Es decir, la superficie construida tiene

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

como segunda forma cuadrática.

Hemos demostrado que existe una superficie con la primera y la segunda formas cuadráticas dadas.

Desmostremos ahora que esta superficie es única salvo su posición en el espacio.

Sean Φ_1 y Φ_2 dos superficies cuyas primera y segunda formas cuadráticas coinciden. Sobrepongamos las superficies Φ_1 y Φ_2 de modo que coincidan dos puntos respectivos de las mismas (o sea, los puntos correspondientes a valores iguales de los parámetros, digamos, (u_0, v_0)) y las respectivas direcciones y normales en estos puntos. Tal superposición es factible debido a la coincidencia de las primeras formas cuadráticas. Sean $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1(u, v)$ y $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2(u, v)$ las ecuaciones de las superficies realizada esta superposición.

El sistema de ecuaciones diferenciales para ξ, η y ζ se cumple obviamente si tomamos

$$\xi = \boldsymbol{r}_{1u}, \quad \eta = \boldsymbol{r}_{1v}, \quad \text{y} \quad \zeta = \boldsymbol{n}_1$$

o

$$\xi = \boldsymbol{r}_{2u}, \quad \eta = \boldsymbol{r}_{2v} \quad \text{y} \quad \zeta = \boldsymbol{n}_2.$$

Pero como ambas soluciones coinciden en el punto (u_0, v_0), han de coincidir idénticamente. O sea,

$$\boldsymbol{r}_{1u}(u, v) = \boldsymbol{r}_{2u}(u, v) \quad \text{y} \quad \boldsymbol{r}_{1v}(u, v) = \boldsymbol{r}_{2v}(u, v)$$

o

$$d\boldsymbol{r}_1(u, v) = d\boldsymbol{r}_2(u, v)$$

de donde

$$\boldsymbol{r}_1(u, v) = \boldsymbol{r}_2(u, v) + \boldsymbol{c}.$$

Puesto que $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_2$ para $u = u_0$ y $v = v_0$, resulta que $\boldsymbol{c} = 0$ y, por consiguiente, $\boldsymbol{r}_1(u, v) = \boldsymbol{r}_2(u, v)$.

Es decir, las superficies Φ_1 y Φ_2 son iguales a menos de un movimiento y una reflexión especular.

Hemos demostrado completamente el teorema.

PROBLEMAS Y TEOREMAS PARA EL CAPITULO VIII

1. Demostrar que si el elemento lineal de la superficie es

$$ds^2 = \lambda (du^2 + dv^2),$$

entonces la curvatura gaussiana de la superficie es

$$K = -\frac{1}{2\lambda} \Delta \ln \lambda,$$

donde Δ es el operador de Laplace:

$$\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right).$$

2. Probar que la superficie de elemento lineal

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{(u^2 + v^2 + c)^2}.$$

tiene curvatura gaussiana constante.

3. Demostrar que si el elemento lineal de la superficie es de la forma

$$ds^2 = du^2 + 2 \cos \omega \, du \, dv + dv^2,$$

entonces la curvatura gaussiana de la superficie es

$$K = -\frac{\omega_{uv}}{\operatorname{sen} \omega}.$$

4. Demostrar que toda red de Chébyshev en el plano se determina por la ecuación vectorial

$$r = \varphi(u) + \psi(v).$$

La red queda formada por las curvas $u = \text{const}$ y $v = \text{const}$.

5. Hallar los símbolos de Christoffel Γ^h_{ij} para el caso en que el elemento lineal de la superficie es de la forma

$$ds^2 = \lambda(du^2 + dv^2).$$

6. Probar que siendo asintótica la red de coordenadas sobre la superficie, tienen lugar las igualdades:

$$\frac{1}{2}(EG - F^2)(\ln|K|)_u - FE_v + EG_u = 0,$$

$$\frac{1}{2}(EG - F^2)(\ln|K|)_v - FG_u + GE_v = 0,$$

donde K es la curvatura gaussiana de la superficie.

7. Demostrar que las líneas asintóticas sobre una superficie de curvatura gaussiana negativa constante forman una red de Chébyshev. Y que, recíprocamente, si la red asintótica sobre la superficie es una red de Chébyshev, entonces la curvatura gaussiana de la superficie es constante.

8. Mostrar que si la red de coordenadas sobre la superficie está formada por líneas de curvatura, entonces las fórmulas de Peterson—Codazzi toman la forma

$$L_v = HE_v,$$

$$N_u = HG_u,$$

donde H es la curvatura media de la superficie.

9. Demostrar que tomando sobre una superficie de área mínima como líneas coordenadas las líneas de curvatura y escogiendo adecuadamente los parámetros u y v, la primera y la segunda formas cuadráticas quedan así:

$$I = \lambda(du^2 + dv^2),$$

$$II = du^2 - dv^2.$$

10. Supongamos que sobre una superficie de área mínima se han escogido las coordenadas u y v, igual que en el problema 9. Demostrar sucesivamente las proposiciones siguientes:

1) si $r(u, v)$ es el vector del punto de la superficie, entonces

$$\Delta r = 0,$$

donde Δ es el operador de Laplace; es decir, las coordenadas $x(u, v)$, $y(u, v)$ y $z(u, v)$ del vector $r(u, v)$ son funciones armónicas;

2) si $f_1(w)$, $f_2(w)$ y $f_3(w)$ (donde $w = u + iv$) son funciones analíticas de parte real $x(u, v)$, $y(u, v)$ y $z(u, v)$, respectivamente, entonces

$$f_1'^2 + f_2'^2 + f_3'^2 = 0.$$

11. Siendo $f_1(w)$, $f_2(w)$ y $f_3(w)$ tres funciones analíticas cualesquiera de la variable $w = u + iv$ que cumplen la condición

$$f_1'^2 + f_2'^2 + f_3'^2 = 0$$

y siendo $\varphi_1(u, v)$, $\varphi_2(u, v)$ y $\varphi_3(u, v)$ las partes reales de estas funciones, demostrar que es de área mínima la superficie determinada por las ecuaciones

$$x = \varphi_1(u, v), \ y = \varphi_2(u, v), \ z = \varphi_3(u, v).$$

12. Demostrar que cualquier superficie de área mínima puede ser definida mediante las ecuaciones

$$x = \operatorname{Re} \int (\varphi^2(w) + \psi^2(w))\, dw,$$

$$y = \operatorname{Re} i \int (\varphi^2(w) - \psi^2(w))\, dw,$$

$$z = \operatorname{Re} \int 2i\varphi(w)\, \psi(w)\, dw,$$

donde φ y ψ son funciones analíticas de $w = u + iv$ y Re significa la parte real.

CAPITULO IX

GEOMETRIA INTERIOR DE SUPERFICIES

Por geometría interior de la superficie se comprende el capítulo de la geometría que se ocupa de aquellas propiedades de superficies y figuras sobre las mismas que dependen solamente de las longitudes de las curvas sobre la superficie.

Tratándose de superficies regulares, podemos decir que la geometría interior de éstas estudia las propiedades de superficies y figuras sobre las mismas determinadas por la primera forma cuadrática.

Los objetos que estudia la geometría interior son las longitudes de curvas sobre la superficie, los ángulos entre curvas, las áreas de regiones, la curvatura gaussiana de la superficie, etc.

En este capítulo estudiaremos nuevos conceptos relacionados exclusivamente con la primera forma cuadrática de la superficie y, por ende, pertenecientes a la geometría interior de la superficie.

§ 1. Curvatura geodésica de una curva sobre una superficie

Sean Φ una superficie regular y $\tilde{\gamma}$ una curva sobre la misma. Tracemos por un punto arbitrario P de la curva $\tilde{\gamma}$ el plano tangente α a la superficie y proyectemos sobre este plano un pequeño entorno del punto P de la curva $\tilde{\gamma}$. Obtendremos así una curva $\bar{\gamma}$ en el plano α. Su curvatura en el punto P se denomina *curvatura geodésica* de la curva $\tilde{\gamma}$ en el punto P. La curvatura geodésica en el punto P se considera positiva o negativa según que la tangente a la curva $\bar{\gamma}$, al pasar por el punto P, gire alrededor de la normal a la superficie formando tornillo usual o inverso. Hallemos la expresión para la curvatura geodésica de la curva.

Tracemos por la curva $\tilde{\gamma}$ una superficie cilíndrica de generatrices perpendiculares al plano α (fig. 41). Según el teorema de Meusnier, la curvatura k de la curva $\tilde{\gamma}$ en el punto P y la curvatura $\varkappa$ de la curva $\bar{\gamma}$ en el mismo punto están ligadas por la relación

$$k \cos\vartheta = \varkappa,$$

donde ϑ es el ángulo formado por las normales principales a estas curvas.

Sea $r = \tilde{r}(s)$ la parametrización intrínseca de la curva $\tilde{\gamma}$, sean $\tilde{\tau}$ y $\tilde{v}$ los vectores unitarios de la tangente y de la normal principal a la curva $\tilde{\gamma}$ y sea n el vector unitario de la normal a la superficie. Entonces, $\tilde{r}'' = k\tilde{v}$ y $\tilde{\tau} \times n$ tiene la dirección de la normal a la curva $\bar{\gamma}$ en el punto P; por consiguiente, salvo el signo,

$$\varkappa = k \cos\vartheta = (\tilde{r}'', \tilde{r}', n).$$

Pasemos al caso de una parametrización arbitraria de la curva $\tilde{\gamma}$. Tenemos

$$\tilde{r}'_s = \tilde{r}'_t t'_s = \tilde{r}'_t \cdot \frac{1}{|\tilde{r}'_t|}.$$

$$\tilde{r}''_{ss} = \tilde{r}''_{tt} \frac{1}{|\tilde{r}'_t|^2} + \tilde{r}'_t \left(\frac{1}{|\tilde{r}'_t|}\right)',$$

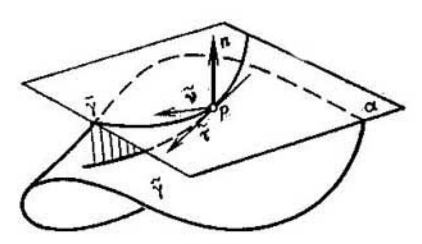


Fig. 41

Introduciendo en la fórmula para $\varkappa$ las expresiones halladas para $\tilde{\boldsymbol{r}}'_s$ y $\tilde{\boldsymbol{r}}''_{ss}$, obtenemos

$$\varkappa=\frac{1}{|\tilde{\boldsymbol{r}}'|^3}(\boldsymbol{r}'',\ \tilde{\boldsymbol{r}}',\ \boldsymbol{n}),$$

donde la derivación corresponde al parámetro t.

Sea $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,\ v)$ alguna parametrización regular de la superficie en un entorno del punto P y sean $u=u(t)$, $v=v(t)$ las ecuaciones de la curva $\tilde{\gamma}$ en un entorno de este punto. Entonces, se tiene

$$\tilde{\boldsymbol{r}}(t)=\boldsymbol{r}(u(t),\ v(t)),$$

$$\tilde{\boldsymbol{r}}'=\boldsymbol{r}_u u'+\boldsymbol{r}_v v',$$

$$\tilde{\boldsymbol{r}}''=\boldsymbol{r}_{uu}u'^2+2\boldsymbol{r}_{uv}u'v'+\boldsymbol{r}_{vv}v'^2+\boldsymbol{r}_u u''+\boldsymbol{r}_v v''=$$
$$=(u''+A)\,\boldsymbol{r}_u+(v''+B)\,\boldsymbol{r}_v+C\boldsymbol{n},$$

donde

$$A=\Gamma^1_{11}u'^2+2\Gamma^1_{12}u'v'+\Gamma^1_{22}v'^2,$$
$$B=\Gamma^2_{11}u'^2+2\Gamma^2_{12}u'v'+\Gamma^2_{22}v'^2,$$
$$C=Lu'^2+2Mu'v'+Nv'^2.$$

Introduciendo las expresiones de $\tilde{\boldsymbol{r}}'$ y $\tilde{\boldsymbol{r}}''$ en la fórmula para $\varkappa$, después de unos cálculos sencillos encontramos

$$\varkappa=\frac{\sqrt{EG-F^2}}{(Eu'^2+2Fu'v'+Gv'^2)^{\frac{3}{2}}}(u''v'-v''u'+Av'-Bu').$$

Puesto que las magnitudes Γ_{ij}^{h} dependen sólo de los coeficientes de la primera forma cuadrática de la superficie, resulta que *la curvatura geodésica de una curva sobre la superficie se determina exclusivamente por la métrica de la superficie y, por consiguiente, no varía por efecto de doblamiento de la superficie.*

Hallemos la fórmula para la curvatura geodésica de una curva en el caso en que la primera forma cuadrática es

$$I = du^2 + G dv^2.$$

En este caso, como hemos visto en el § 1 del capítulo VIII, se tiene

$$\Gamma_{11}^{1} = 0, \qquad \Gamma_{11}^{2} = 0,$$
$$\Gamma_{12}^{1} = 0, \qquad \Gamma_{12}^{2} = \frac{1}{2}\frac{G_u}{G},$$
$$\Gamma_{22}^{1} = -\frac{1}{2}G_u, \qquad \Gamma_{22}^{2} = \frac{1}{2}\frac{G_v}{G},$$

de donde

$$A = -\frac{1}{2}G_u v'^2 \quad \text{y} \quad B = \frac{G_u}{G}u'v' + \frac{1}{2}\frac{G_v}{G}v'^2.$$

Por consiguiente,

$$\varkappa = \frac{\sqrt{G}}{(u'^2 + Gv'^2)^{\frac{3}{2}}}\left(u''v' - v''u' - \frac{1}{2}G_u v'^3 - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}\frac{G_v}{G}u'v'^2 - \frac{G_u}{G}u'^2 v'\right).$$

§ 2. Líneas geodésicas sobre una superficie

Una curva sobre una superficie se denomina *línea geodésica* si su curvatura geodésica es igual a cero en todo punto.

Teorema. Para que la curva γ sea una línea geodésica es necesario y suficiente que su normal principal coincida con la normal a la superficie en todo punto en que su curvatura sea distinta de cero.

Demostración. Según hemos demostrado en el parágrafo

anterior, la curvatura geodésica es

$$\varkappa = \frac{1}{|\tilde{r}'|^3} (\tilde{r}'', \tilde{r}', n),$$

donde $\tilde{\mathbf{r}}$ es el vector del punto de la curva y la diferenciación se realiza respecto al arco. Puesto que $\tilde{\mathbf{r}}'' = k\tilde{\mathbf{v}}$, resulta que $\varkappa = 0$ si, y sólo si, $\tilde{\mathbf{v}} \parallel n$ cuando $k \neq 0$.

Hemos demostrado el teorema.

Corolario. Si dos superficies son tangentes a lo largo de una curva que es línea geodésica de una de ellas, también será línea geodésica de la otra.

Para obtener la ecuación diferencial de las líneas geodésicas basta igualar a cero la curvatura geodésica. Es decir, la ecuación diferencial de las líneas geodésicas es

$$u''v' - v''u' + Av' - Bu' = 0.$$

La indeterminación que encierra esta ecuación (hay una ecuación y dos funciones incógnitas $u(t)$ y $v(t)$ se debe a que pueden tomarse distintas parametrizaciones para la curva.

Teorema. En una superficie regular, por todo punto y en cualquier dirección puede trazarse una línea geodésica única.

Demostración. Sea $P(u_0, v_0)$ un punto arbitrario de la superficie y sea $(u_0' : v_0')$ una dirección arbitraria en este punto.

Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$u'' + A = 0 \text{ y } v'' + B = 0.$$

Sea $u = u(t)$ y $v = v(t)$ la solución de este sistema que satisface las condiciones iniciales

$$u(t_0) = u_0, \ v(t_0) = v_0, \ u'(t_0) = u_0' \text{ y } v'(t_0) = v_0'.$$

Entonces la curva de la superficie definida por las ecuaciones

$$u = u(t), \qquad v = v(t)$$

es una línea geodésica ya que

$$u''v' - v''u' + Av' - Bu' = 0.$$

Esta línea geodésica pasa por el punto (u_0, v_0) y tiene en el punto (u_0, v_0) la dirección $(u_0' : v_0')$. Demostremos que es única.

Supongamos que por el punto (u_0, v_0) sobre la superficie pasan dos líneas geodésicas γ_1 y γ_2 que tienen en este punto la misma dirección $(u_0' : v_0')$. Supongamos, para concretar, que $u_0' \neq 0$. Entonces, en un entorno del punto (u_0, v_0) estas curvas pueden ser definidas por las ecuaciones respectivas

$$v = v_1(u) \quad \text{y} \quad v = v_2(u).$$

La condición de igualdad a cero de las curvaturas geodésicas de las curvas γ_1 y γ_2 da

$$-v_1'' + Av_1' - B = 0,$$
$$-v_1'' + Av_1' - B = 0.$$

Es decir, las funciones $v_1(u)$ y $v_2(u)$ satisfacen una misma ecuación diferencial con idénticas condiciones iniciales

$$v_1(u_0) = v_0, \quad v_1'(u_0) = \frac{v_0'}{u_0'},$$
$$v_2(u_0) = v_0, \quad v_2'(u_0) = \frac{v_0'}{u_0'}.$$

De ello se deduce que $v_1(u) \equiv v_2(u)$, o sea, las curvas γ_1 y γ_2 coinciden en un entorno del punto (u_0, v_0) y, por consiguiente, coinciden en general.

Hemos demostrado el teorema.

Ejemplo. Las líneas geodésicas sobre la esfera son las circunferencias máximas, y sólo ellas. Efectivamente, en virtud del primer teorema, cualquier circunferencia máxima es una línea geodésica. Por todo punto y en cualquier dirección se puede trazar una circunferencia máxima y, por consiguiente, de acuerdo con el segundo teorema no hay otras líneas geodésicas que las circunferencias máximas.

§ 3. Parametrización semigeodésica de una superficie

Una parametrización de la superficie se denomina *semigeodésica* si es ortogonal y una familia de las líneas coordenadas está formada por líneas geodésicas.

Teorema. Sean γ una curva sobre la superficie y P un punto de la misma. Entonces, en un entorno del punto P puede introducirse una parametrización semigeodésica de

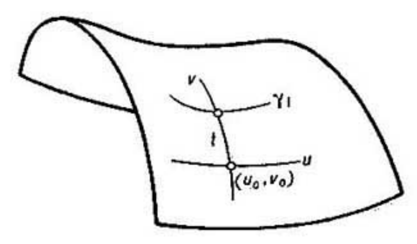


Fig. 42

modo que una familia de líneas coordenadas esté formada por líneas geodésicas perpendiculares a γ, y la otra, por trayectorias ortogonales de éstas.

Demostración. Sea (u, v) alguna parametrización de la superficie. En un entorno del punto P la curva γ puede representarse por la ecuación $v = f(u)$ o por la ecuación $u = f(v)$. Supongamos, para concretar, que γ viene dada por la ecuación $v = f(u)$.

Consideremos en un entorno del punto P la familia de curvas definidas por la ecuación

$$v - f(u) = \text{const.}$$

Según el teorema del § 2 del capítulo VI la superficie admite una parametrización ortogonal tal que una familia de líneas coordenadas consta de las curvas $v - f(u) = \text{const.}$

De ello se deduce que, sin perder generalidad, podemos considerar la curva γ como línea coordenada $u = u_0$ (u_0 y v_0 son las coordenadas del punto P).

Tracemos por un punto arbitrario (u_0, t) de la curva la geodésica γ_t perpendicular a γ (fig. 42). Siendo t próximo a v_0, esta geodésica puede ser dada por una ecuación

$$v = v(u, t),$$

donde $v(u, t)$ es una función que respecto a u satisface la ecuación de las líneas geodésicas

$$-v'' + Av' - B = 0.$$

Del teorema sobre la diferenciabilidad de las soluciones de ecuaciones diferenciales respecto a las condiciones iniciales se deduce que la función $v(u, t)$ es regular en t.

Puesto que $v(u_0, t) = t$, para $|u - u_0|$ pequeño se tiene

$$\frac{\partial v(u, t)}{\partial t} \neq 0.$$

Esto permite resolver respecto a t la ecuación $v = v(u, t)$ en un entorno de P. Tendremos

$$t = \varphi(u, v).$$

Derivando respecto a v la igualdad $v = v(u, t)$, obtenemos

$$1 = v_t(u, t)\, t_v,$$

de donde

$$\varphi_v \neq 0.$$

Las ecuaciones $\varphi(u, v) = t = \text{const}$ determinan las geodésicas γ_t. Puesto que $\varphi_u^2 + \varphi_v^2 \neq 0$, existe por el teorema del § 2 del capítulo VI una parametrización ortogonal de la superficie en un entorno del punto P tal que una familia de líneas coordenadas consta de las curvas $\varphi(u, v) =$ $=$ const, o sea, de las líneas geodésicas γ_t.

Hemos demostrado el teorema.

Veamos cuál es la primera forma cuadrática de la superficie si la parametrización es semigeodésica.

Como la parametrización es ortogonal, se tiene $F = 0$ y, por consiguiente,

$$I = E\, du^2 + G\, dv^2.$$

Una familia de líneas coordenadas, por ejemplo, la familia $v = \text{const}$, se compone de líneas geodésicas. Introduciendo $v = \text{const}$ en la ecuación de las líneas geodésicas

$$u''v' - v''u' + Av' - Bu' = 0,$$

obtenemos

$$B = 0,$$

de donde

$$\Gamma_{11}^2 = -\frac{1}{2}\frac{E_v}{G} = 0,$$

o sea, E no depende de v.

Por ser E independiente de v se hace posible simplificar la primera forma cuadrática introduciendo en lugar de u un parámetro nuevo $\bar{u}$ ligado a u por la relación

$$d\bar{u} = \sqrt{E(u)}\, du.$$

La primera forma cuadrática queda entonces así

$$I = d\bar{u}^2 + G\, dv^2.$$

Para revelar el significado geométrico del parámetro $\bar{u}$, basta señalar que la longitud del segmento de cualquier línea geodésica $v = \text{const}$ comprendida entre las líneas $\bar{u} = c_1$ y $\bar{u} = c_2$ no depende de v y es igual a $|c_1 - c_2|$.

Introduciendo un nuevo parámetro $\bar{v}$ ligado a v por la relación $d\bar{v} = \sqrt{G(v, \bar{u}_0)}\, dv$, puede lograrse que la primera forma cuadrática de la superficie quede así

$$I = d\bar{u}^2 + \bar{G}(\bar{u}, \bar{v})\, d\bar{v}^2,$$

con la particularidad de que $\bar{G} = 1$ a lo largo de la línea $\bar{u} = u_0$.

Si la línea $\bar{u} = u_0$ también es geodésica, de la ecuación de las líneas geodésicas se deduce que $\bar{G}_u = 0$ a lo largo de esta línea.

§ 4. Líneas de longitud mínima sobre una superficie

Una curva γ que pertenece a la superficie y une los puntos P y Q se denomina *línea de longitud mínima* si ninguna otra línea que pertenece a la superficie y une los puntos P y Q tiene longitud menor que la curva γ.

Teorema. Todo segmento suficientemente pequeño de una línea geodésica es línea de longitud mínima. Más exactamente, si γ es una línea geodésica, P es un punto de la misma y R y S son puntos de la línea geodésica suficientemente próximos a P, entonces el segmento RS de la línea geodésica es línea de longitud mínima.

Demostración. Tracemos por el punto P la línea geodésica $\bar{\gamma}$ perpendicular a γ y consideremos la red de coordenadas semigeodésica tomando como familia de líneas u las líneas geodésicas perpendiculares a $\bar{\gamma}$. Escojamos los

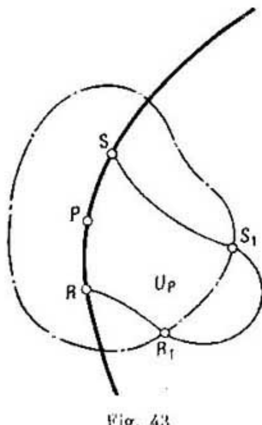


Fig. 43

parámetros u y v de modo que al punto P le correspondan los valores $u = v = 0$ y que el elemento lineal de la superficie sea

$$I = du^2 + G\ dv^2.$$

Supongamos que el segmento RS de la línea geodésica γ no es línea de longitud mínima y que $\tilde{\gamma}$ es una curva que pertenece a la superficie, une los puntos R y S y tiene longitud menor que el segmento RS de la línea geodésica γ.

Si los puntos R y S son suficientemente próximos a P, la curva $\tilde{\gamma}$ debe encontrarse dentro del entorno U_P del punto P en el cual se ha definido la parametrización semigeodésica u y v. Demostremos esto.

Supongamos que la distancia del punto P a la frontera del entorno U_P es mayor que $\varepsilon > 0$. Tomemos los puntos R y S a una distancia de P menor que $\frac{\varepsilon}{2}$ (la distancia se toma a lo largo de la curva γ). Sean R_1 y S_1 el primero y el último punto de intersección de $\tilde{\gamma}$ con la frontera de U_P (fig. 43).

Tenemos

$$\widehat{PR} + \widehat{RR_1} > \varepsilon \text{ y } \widehat{PS} + \widehat{SS_1} > \varepsilon,$$

de donde

$$\widehat{PR} + \widehat{PS} + \widehat{RR_1} + \widehat{SS_1} > 2\varepsilon.$$

Pero

$$\widehat{RR_1} + \widehat{SS_1} < \widehat{PR} + \widehat{PS} < \varepsilon$$

y llegamos a una contradicción. De modo que la curva $\widetilde{\gamma}$ se encuentra dentro del entorno U_P.

Sean

$$u = u(t), \quad v = v(t)$$

las ecuaciones de la curva $\widetilde{\gamma}$. Su longitud es

$$s(\widetilde{\gamma}) = \int_{(R)}^{(S)} \sqrt{u'^2 + Gv'^2}\, dt \geqslant \int_{(R)}^{(S)} |u'|\, dt \geqslant |u_S - u_R|.$$

Pero $|u_R - u_S|$ es la longitud del segmento RS de la línea geodésica γ. Llegamos a una contradicción.

Hemos demostrado el teorema.

Ahora, una vez establecido que los trozos suficientemente pequeños de las líneas geodésicas representan líneas de longitud mínima, podemos obtener la ecuación de las líneas geodésicas como ecuación de Euler para la funcional

$$I = \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}\, dt,$$

o sea,

$$\Phi_u - \frac{d}{dt}\Phi'_u = 0, \quad \Phi_v - \frac{d}{dt}\Phi'_v = 0,$$

donde

$$\Phi = \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}.$$

§ 5. Teorema de Gauss — Bonnet

En la superficie regular Φ, sea G una región homeomorfa al círculo y limitada por una curva γ regular a trozos. Determinemos la dirección sobre la curva γ de modo que la región G quede a la derecha cuando la curva se recorre en la dirección escogida sobre la cara de la superficie que corresponde a la normal n.

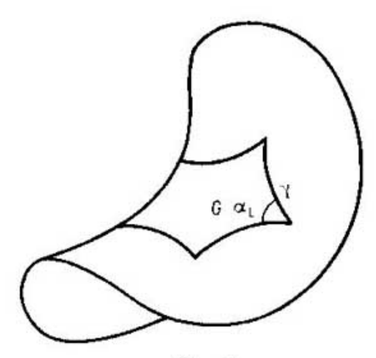


Fig. 44

Designemos por $\varkappa$ la curvatura geodésica de la curva γ en un punto arbitrario y por $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ los ángulos que forman los lados $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ de la curva γ en la región G (fig. 44). Tiene lugar el siguiente teorema.

Teorema de Gauss—Bonnet.

$$\sum_k \int_{\gamma_k} \varkappa \, ds + \sum_k (\pi - \alpha_k) = 2\pi - \iint_G K \, d\sigma,$$

donde K es la curvatura gaussiana de la superficie y la integración en el segundo miembro de la igualdad corresponde al área de la región G.

En particular, si γ es una curva regular, se tiene

$$\int_\gamma \varkappa \, ds = 2\pi - \iint_G K \, d\sigma.$$

Demostración. Para simplificar la exposición, supongamos que la curva γ es regular y que en toda la región G puede introducirse una parametrización semigeodésica de la superficie.

Teniendo en cuenta la fórmula para la curvatura geodésica en coordenadas semigeodésicas obtenida en el § 1,

tenemos

$$\varkappa\, ds = \frac{\sqrt{G}}{(u'^2 + Gv'^2)}\,(u''v' - v''u' - \frac{1}{2}\,G_u v'^3 -$$

$$-\frac{1}{2}\,\frac{G_v}{G}\,u'v'^2 - \frac{G_u}{G}\,(u'^2 v')\,dt =$$

$$= -d\,\mathrm{Arctg}\,\frac{\sqrt{G}v'}{u'} - v'\,(\sqrt{G})_u\,dt.$$

Puesto que la función Arctg w es multiforme y sus valores correspondientes a un mismo valor del argumento w difieren en un múltiplo de π, se tiene

$$\int_\gamma -d\,\mathrm{Arctg}\,\frac{\sqrt{G}v'}{u'} = k\pi,$$

donde k es un número entero.

Ahora, según la fórmula de Green — Ostrogradski,

$$\int_\gamma -(\sqrt{G})_u\,dv = \iint_G (\sqrt{G})_{uu}\,du\,dv =$$

$$= \iint_G \frac{(\sqrt{G})_{uu}}{\sqrt{G}}\,\sqrt{G}\,du\,dv = \iint_G -K\,d\sigma.$$

Es decir,

$$\int_\gamma \varkappa\,ds = k\pi + \iint_G -K\,d\sigma.$$

Resta encontrar cuánto vale el número entero k.

Tenemos

$$k\pi = \int_\gamma -d\,\mathrm{Arctg}\,\frac{\sqrt{G}v'}{u'}.$$

Si fuese $G = 1$, la magnitud $k\pi$ representaría el ángulo de giro de la tangente a la curva $\bar{\gamma}$ en el plano uv correspondiente a la curva γ de la superficie, al recorrerse esta curva. Como se sabe, este ángulo es igual a 2π.

Puesto que el valor de la integral

$$\int_\gamma -d\,\mathrm{Arctg}\,\frac{\lambda(u,\,v)\,v'}{u'}\quad(\lambda(u,\,v) > 0)$$

depende continuamente de $\lambda(u, v)$ y es igual a 2π cuando $\lambda(u, v) = 1$, será igual a 2π para cualquier función $\lambda(u, v) > 0$ y, en particular, para $\lambda(u, v) = \sqrt{G}$.

Hemos demostrado completamente el teorema.

Toda región de una superficie limitada por tres líneas geodésicas y homeomorfa al círculo se denomina *triángulo geodésico.*

Aplicado a un triángulo geodésico, el teorema de Gauss—Bonnet da

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi+\iint_{\Delta} K\,d\delta,$$

de donde se deduce que *la suma de los ángulos de un triángulo geodésico es mayor que π para toda superficie de curvatura positiva, es menor que π para superficies de curvatura negativa y es igual a π para superficies de curvatura nula.*

§ 6. Superficies de curvatura gaussiana constante

Sea Φ una superficie de curvatura gaussiana constante K y sea P un punto arbitrario de esta superficie. Tomemos sobre la superficie Φ en un entorno del punto P una parametrización semigeodésica partiendo de cualquier línea geodésica que pase por el punto P. La primera forma cuadrática de la superficie será

$$I = du^2 + G\,dv^2$$

pudiéndose aceptar que $G(0, v) = 1$ y $G_u(0, v) = 0$.

Puesto que la curvatura gaussiana de la superficie es constante e igual a K, el coeficiente G debe satisfacer la ecuación diferencial

$$(\sqrt{G})_{uu}+K\sqrt{G}=0. \qquad (*)$$

(En el caso de la parametrización semigeodésica de la superficie la curvatura gaussiana es $K = -(\sqrt{G})_{uu}(\sqrt{G})^{-1}$.)

Distinguiremos tres casos:

1. $K > 0$.
2. $K < 0$.
3. $K = 0$.

En el primer caso la forma general de la expresión $\sqrt{G}$ que satisface la ecuación (*) es

$$\sqrt{G} = A(v)\cos\sqrt{K}u + B(v)\operatorname{sen}\sqrt{K}u.$$

Puesto que $G(0, v) = 1$ y $G_u(0, v) = 0$, se tiene $A(v) = 1$ y $B(v) = 0$. Es decir, en el caso de $K > 0$ existe una parametrización de la superficie para la cual la primera forma cuadrática es

$$I = du^2 + \cos^2\sqrt{K}\,u\,dv^2.$$

Análogamente, en el segundo caso la primera forma cuadrática es

$$I = du^2 + \operatorname{ch}^2\sqrt{-K}\,u\,dv^2.$$

Finalmente, en el tercer caso

$$I = du^2 + dv^2.$$

Teorema. Todas las superficies de curvatura gaussiana constante e igual a K son localmente isométricas. Es más, si Φ_1 y Φ_2 *son superficies de curvatura gaussiana constante* K, P_1 *y* P_2 *puntos arbitrarios de estas superficies y* l_1 *y* l_2 *unas direcciones arbitrarias en estos puntos, entonces existe una aplicación isométrica de un entorno del punto* P_1 *de la superficie* Φ_1 *sobre un entorno del punto* P_2 *de la superficie* Φ_2 *que pone en correspondencia a la dirección* l_1 *sobre la superficie* Φ_1 *en el punto* P_1 *la dirección* l_2 *sobre la superficie* Φ_2 *en el punto* P_2.

Para demostrar este teorema basta tomar en los entornos de los puntos P_1 y P_2 sobre las superficies Φ_1 y Φ_2 unas parametrizaciones semigeodésicas partiendo de las direcciones geodésicas l_1 y l_2. Entonces, las primeras formas cuadráticas de las superficies coincidirán y la aplicación isométrica requerida se obtendrá poniendo en correspondencia los puntos de coordenadas iguales.

PROBLEMAS Y TEOREMAS PARA EL CAPITULO IX

1. Mostrar que la línea geodésica es una recta si es a la vez una línea asintótica.

Mostrar que la línea geodésica es plana si es a la vez una línea de curvatura.

2. Sean γ una línea geodésica y P un punto de la misma. Demostrar que si un punto Q de la línea geodésica es suficientemente próximo a P, entonces el segmento PQ de la línea geodésica será línea de longitud mínima entre todas las curvas rectificables (y no tan sólo suaves a trozos) que pertenecen a la superficie y pasan por los puntos P y Q.

Demostrar que el segmento PQ de la línea geodésica γ es la única línea de longitud mínima que pertenece a la superficie y une los puntos P y Q siempre que el punto Q sea suficientemente próximo a P.

3. Demostrar que para todo punto P de una superficie regular existe un entorno en el cual se puede introducir una parametrización semigeodésica partiendo de cualquier línea geodésica que pase por el punto P.

4. Basándose en los dos teoremas anteriores demostrar que toda línea de longitud mínima sobre una superficie regular es una línea geodésica.

5. Demostrar que cualquiera que sea el entorno Ω de un punto P de una superficie regular siempre puede indicarse en él un entorno ω tal que dos puntos cualesquiera del entorno ω se puedan unir por una línea de longitud mínima que pertenezca a Ω.

6. Demostrar que dos puntos cualesquiera de una superficie completa se pueden unir por una línea de longitud mínima.

7. Probar que la ecuación de las líneas geodésicas en el caso de la parametrización semigeodésica $(ds^2 = du^2 + G\,dv^2)$ puede ser representada en la forma

$$\frac{d\alpha}{dv} = -\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u},$$

donde α es el ángulo que la línea geodésica forma con las líneas $v = \text{const}$.

8. Demostrar que si sobre una superficie se tiene una curva γ definida por las ecuaciones $u = u(\alpha)$, $v = v(\alpha)$ que experimenta una deformación transformándose en el momento t en la curva $u = u(\alpha) + \lambda(\alpha)\,t$, $v = v(\alpha) + \mu(\alpha)\,t$, entonces la variación de la longitud de arco de la curva γ determinada por esta deformación es

$$\Delta s = t \int_{\gamma} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u}\lambda + \frac{\partial \Phi}{\partial v}\mu + \frac{\partial \Phi}{\partial u'}\lambda' + \frac{\partial \Phi}{\partial v'}\mu' \right) d\alpha + O(t^2),$$

donde $\Phi = \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}$ y $O(t)^2$ representa la parte de Δs de orden t^2 como mínimo.

Aplicando la integración por partes y suponiendo que los extremos de la curva γ permanecen inmóviles durante la deformación, demostrar que

$$\Delta s = t \int_{\gamma} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} - \frac{d}{d\alpha}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u'}\right)\right)\lambda\, d\alpha + t \int_{\gamma} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial v} - \frac{d}{d\alpha}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial v'}\right)\right)\mu\, d\alpha + O(t^2).$$

9. Partiendo de que los trozos suficientemente pequeños de líneas geodésicas son líneas de longitud mínima, probar que las ecuaciones de las líneas geodésicas pueden ser representadas en la forma

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} - \frac{d}{d\alpha}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u'}\right) = 0 \ y \ \frac{\partial \Phi}{\partial v} - \frac{d}{d\alpha}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial v'}\right) = 0,$$

donde $\Phi = \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}$. En particular, si

$$\Phi = \sqrt{1 + Gv'^2},$$

la ecuación de las líneas geodésicas será

$$\frac{\frac{1}{2} G_v v'^2}{\sqrt{1+Gv'^2}} - \frac{d}{du}\left(\frac{Gv'}{\sqrt{1+Gv'^2}}\right) = 0.$$

10. Probar que las líneas geodésicas sobre una superficie de revolución pueden hallarse en cuadraturas.

11. Probar que la ecuación de las líneas geodésicas para superficies de elemento lineal $ds^2 = (U(u) + V(v))\cdot(du^2 + dv^2)$ (estas superficies se denominan *superficies de Liouville*) se reduce a la forma

$$d\left(\frac{U\,dv^2 - V\,du^2}{du^2 + dv^2}\right) = 0.$$

De ello se deduce que las líneas geodésicas de estas superficies pueden hallarse en cuadraturas, a saber,

$$\int \frac{du}{\sqrt{U-c}} = \pm \int \frac{dv}{\sqrt{V+c}} + c_1.$$

12. Demostrar que las superficies de segundo grado son superficies de Liouville. La red de coordenadas respecto a la cual el elemento lineal tiene la forma $ds^2 = (U + V)(du^2 + dv^2)$ consta de líneas de curvatura (véase el problema 11 del capítulo VII).

13. Probar que en un entorno de cualquier punto P de una superficie regular puede introducirse una parametrización semigeodésica (u, v) con las propiedades siguientes: las líneas u son las líneas geodésicas que pasan por el punto P y las líneas v son las circunferencias geodésicas con centro en P. Si los parámetros se escogen de modo que u sea la distancia geodésica hasta P y v sea el ángulo que forma la línea geodésica con una dirección fija en el punto P, entonces el elemento lineal de la superficie toma la forma

$$ds^2 = du^2 + G\,dv^2.$$

Si $u \to 0$, se tiene $G \to 0$, $(\sqrt{G})_u \to 1$ y $-\frac{(\sqrt{G})_{uu}}{\sqrt{G}} \to K(P)$, donde $K(P)$ es la curvatura gaussiana en P.

14. Sea $l(r)$ la longitud de la circunferencia geodésica que tiene radio r y centro en el punto P. Demostrar que

$$\lim_{r\to 0} \frac{2\pi r - l(r)}{r^3} = \frac{\pi}{3} K(P),$$

donde $K(P)$ es la curvatura gaussiana en el punto P.

15. Probar que las líneas geodésicas de la superficie de elemento lineal

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2 + (u\,dv - v\,du)^2}{(c + u^2 + v^2)^2}$$

son $\alpha u + \beta v + \gamma = 0$ (α, β y γ son unas constantes).

16. Probar que $v = c_1\varphi + c_2$ (c_1 y c_2 son constantes) satisface la ecuación

$$-v'' + \frac{\varphi_{vv}}{\varphi_u} v'^3 + \frac{2\varphi_{uv}}{\varphi_u} v'^2 + \frac{\varphi_{uu}}{\varphi_u} v' = 0.$$

17. Probar que si la ecuación de líneas geodésicas en coordenadas semigeodésicas

$$v'' + \frac{1}{2} G_u v'^3 - \frac{1}{2} \frac{G_v}{G} v'^2 + \frac{G_u}{G} v' = 0$$

tiene integral de tipo $v = c_1\varphi(u, v) + c_2$, donde c_1 y c_2 son unas constantes arbitrarias, entonces $G = U(u)\,V(v)$ y, por consiguiente, la curvatura gaussiana de la superficie es constante a lo largo de las líneas v.

18. Una aplicación de una superficie sobre otra se denomina geodésica si por efecto de ella las líneas geodésicas de una superficie corresponden a las líneas geodésicas de la otra. Del problema 15 se deduce que las superficies de curvatura gaussiana constante admiten una aplicación geodésica sobre el plano.

Demostrar que sólo las superficies de curvatura gaussiana constante poseen esta propiedad (*teorema de Beltrami*).

19. Sean A y B dos puntos cercanos tomados en la línea geodésica γ que pasa en una proximidad del punto O de la superficie. Sea ϑ el ángulo del triángulo geodésico AOB correspondiente al vértice O y sea α el ángulo respectivo del triángulo plano de estos mismos lados. Demostrar que $\frac{\vartheta - \alpha}{\sigma} = \frac{1}{3} K^*$, donde σ es el área del triángulo geodésico y K^* difiere poco de la curvatura gaussiana de la superficie en el punto O siempre que el triángulo sea suficientemente pequeño.

20. Sea Δ un triángulo geodésico que comprende el punto P de la superficie. Sean ϑ_1, ϑ_2 y ϑ_3 los ángulos de este triángulo y α_1, α_2 y α_3 los ángulos del triángulo plano correspondiente (véase el problema anterior). Demostrar que los tres cocientes

$$\frac{\vartheta_1 - \alpha_1}{\sigma}, \quad \frac{\vartheta_2 - \alpha^2}{\sigma}, \quad \text{y} \quad \frac{\vartheta_3 - \alpha_3}{\sigma}$$

tienden al límite común $\frac{1}{3}K(P)$ cuando el triángulo Δ tiende al punto P (*teorema de Gauss*).

21. Las superficies F_1 y F_2 se denominan *superficies de centros de la superficie* F si están formadas por los extremos de los segmentos de longitud $\frac{1}{k_1}$ y $\frac{1}{k_2}$ (k_1 y k_2 son las curvaturas principales de F) construidos en las normales a la superficie F. De un modo natural se establece una correspondencia entre los puntos de las superficies F_1, F_2 y F; a saber, son correspondientes los puntos de las superficies que se encuentran sobre una misma normal a la superficie F. Demostrar que a las líneas de curvatura de la superficie F les corresponden las líneas geodésicas de las superficies de centros.

A NUESTROS LECTORES:

«Mir» edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica: manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia-ficción.

Dirijan sus opiniones a la Editorial «Mir», 1 Rizhski per., 2, 129820, Moscú, I-110, GSP, URSS.

«MIR» PUBLICA:

Strelkov S.

MECANICA

Trátase de la introducción fundamental a la mecánica y prepara al estudiante para asimilar capítulos más complejos y especiales de la física teórica y la mecánica moderna. El material didáctico del curso se divide en cuatro partes: 1. Mecánica del movimiento del punto material y el cuerpo sólido; 2. Mecánica de los cuerpos deformables; 3. Oscilaciones, ondas y elementos de acústica; 4. Fundamentos de la teoría especial de la relatividad. Se presta atención especial a los fenómenos de actualidad en los últimos tiempos, tales como la imponderabilidad, el movimiento de los satélites artificiales y proyectiles-cohetes cósmicos, el movimiento de los cuerpos con velocidades supersónicas, etc. El libro está destinado para los estudiantes de las facultades de física de las universidades y centros docentes superiores de pedagogía y también para los alumnos de los centros de enseñanza superior con orientación a las ciencias físicas. No obstante, la clara interpretación física de las leyes y fenómenos principales de la mecánica y la atención especial que brinda el autor a la descripción, explicación y análisis cualitativo de gran número de procesos y fenómenos mecánicos hacen que la obra sea asequible y útil para aquellos que deseen conocer los fundamentos de la mecánica científica.

«MIR» PUBLICA:

Godunov S.

ECUACIONES DE FISICA MATEMATICA

Este libro escrito por Serguei Godunov, Doctor en Ciencias Fisicomatemáticas, contiene el curso completo de conferencias. La original selección del material se debe a que el autor durante muchos años estuvo dedicado al estudio de la aplicación de las ecuaciones diferenciales a la mecánica del medio continuo. Ha elaborado diferentes métodos numéricos destinados a resolver estas ecuaciones. El autor recopiló un material que ha llegado a ser clásico para los especialistas, aunque no se encuentra con frecuencia en los libros de texto ni en las monografías accesibles a un amplio círculo de lectores. Este texto presenta interés tanto para los que estudian el curso de ecuaciones de la física matemática, como para los que se especializan en la rama de la aplicación de los métodos numéricos en la resolución de estas ecuaciones.

«MIR» PUBLICA:

Taréev B.

FISICA DE MATERIALES DIELECTRICOS

Borís Taréev, autor de más de 300 trabajos, es uno de los especialistas más destacados de la URSS en la rama de los materiales dieléctricos, Doctor en Ciencias técnicas, Profesor, Laureado con el premio Estatal de la URSS, personalidad emérita de las ciencias y la técnica de RSFSR. En este libro se examinan: los fenómenos físicos que tienen lugar en los materiales electroaislantes y otros dieléctricos bajo la influencia del campo eléctrico (electroconductibilidad, polarización, pérdidas dieléctricas, perforación, etc.); parámetros que determinan cuantitativamente las propiedades eléctricas de los materiales dieléctricos; la dependencia de dichos parámetros de diferentes factores (temperatura, humedad, radiación, valor y frecuencia de la tensión aplicada y tiempo de permanencia bajo la tensión, etc.); las propiedades físicas comunes más importantes (térmicas, radiales, de humedad). El libro puede servir como material didáctico para los estudiantes de facultades e institutos electrotécnicos, energéticos y radiotécnicos, para posgraduados y colaboradores científicos, así como material de información para ingenieros y peritos técnicos que se dedican al estudio, cálculos, pruebas y explotación de los dieléctricos y los aislamientos eléctricos de diferentes máquinas y aparatos eléctricos, aisladores, condensadores, cables, aparatos de radioelectrónica y sistemas automáticos, etc.